Λήψη απλών αποφάσεων

ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ

- Οι αποφάσεις / προτιμήσεις ενός agent (πράκτορα) μεταξύ των καταστάσεων του κόσμου αποτυπώνονται από μια **συνάρτηση χρησιμότητας** (utility function) $U(S)$, η οποία αποδίδει μια αριθμητική τιμή για να εκφράσει πόσο επιθυμητή είναι μια κατάσταση.
- Οι χρησιμότητες συνδυάζονται με τις πιθανότητες αποτελεσμάτων των ενεργειών για να δώσουν την αναμενόμενη χρησιμότητα της κάθε ενέργειας.

Αρχή της Μέγιστης Αναμενόμενης Χρησιμότητας

- Συνάρτηση χρησιμότητας
  - $U(S)$
- Αναμενόμενη χρησιμότητα
  - $EU(A|E) = \sum_i P(Αποτέλεσμα_i(A) \mid Εκτέλεση(A), E) \cdot U(Αποτέλεσμα_i(A))$

Μια μη αιτιοκρατική ενέργεια *A* έχει $Αποτέλεσμα_i(A)$

$P(Αποτέλεσμα_i(A) \mid Εκτέλεση(A), E)$: Η πιθανότητα κάθε αποτελέσματος, εκτέλεσης της ενέργειας με δεδομένες τις μαρτυρίες *E*

- Η αρχή της **μέγιστης αναμενόμενης χρησιμότητας** (maximum expected utility, MEU) ορίζει ότι ένας ορθολογικός πράκτορας θα πρέπει να επιλέγει μια ενέργεια που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη χρησιμότητά του.
- Υπολογισμός της χρησιμότητας: Για μεμονωμένες ενέργειες μόνο.

Αρχή της Μέγιστης Αναμενόμενης Χρησιμότητας

Αν ένας πράκτορας μεγιστοποιεί μια συνάρτηση χρησιμότητας που αντικατοπτρίζει ορθά τη μέτρηση απόδοσης μέσω της οποίας κρίνεται η -συμπεριφορά του, τότε θα επιτύχει την υψηλότερη δυνατή απόδοση αν πάρουμε το μέσο όρο των περιβαλλόντων στα οποία θα μπορούσε να τοποθετηθεί αυτός ο πράκτορας.

Θεωρία Χρησιμοτήτων

- Η αρχή της Μέγιστης Αναμενόμενης Χρησιμότητας, είναι ένας ορθολογικός τρόπος λήψης αποφάσεων.

Περιορισμοί / λογικές προτιμήσεις Προτιμήσεις και λοταρίες

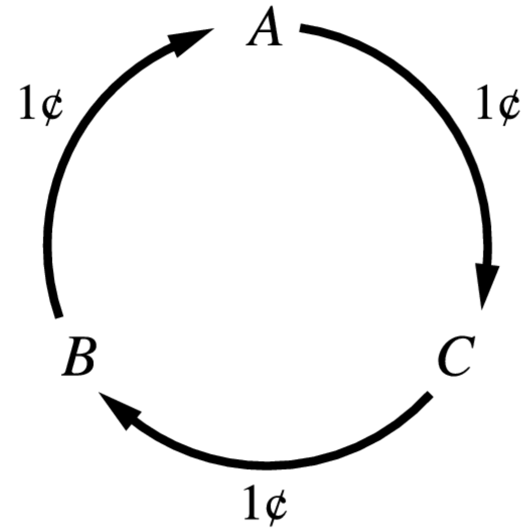
- Προτιμήσεις
  - $A \succ B$ το A είναι προτιμότερο από το B
  - $A \sim B$ ο πράκτορας είναι αδιάφορος μεταξύ των A και B
  - $A \succsim B$ ο πράκτορας προτιμά το A από το B, ή είναι αδιάφορος μεταξύ αυτών

  Τα *A και B* είτε συγκεκριμένες καταστάσεις που προκαλούνται από αιτιοκρατικές ενέργειες είτε τυχαίες.

- Λοταρίες (lotteries)
  - $L = [p_1, C_1; p_2, C_2; \ldots p_n, C_n]$

  Τα δυνατά αποτελέσματα C_i προκύπτουν με πιθανότητες p_i

Αξιώματα της Θεωρίας Χρησιμοτήτων (1/2)



- Διαταξιμότητα
  - $(A \succ B) \vee (B \succ A) \vee (A \sim B)$
- Μεταβατικότητα
  - $(A \succ B)$ ΚΑΙ $(B \succ C) \Rightarrow (A \succ C)$
- Συνέχεια
  - $A \succ B \succ C \Rightarrow \exists p\ [p, A;\ 1 - p, C] \sim B$

Υπάρχει κάποια πιθανότητα *p για την οποία ο λογικός πράκτορας θα είναι αδιάφορος μεταξύ του να επιλέξει τη B για σίγουρα ή να επιλέξει την ενέργεια που δίνει την A με πιθανότητα p και την C με πιθανότητα* 1 – *p*

- Αντικαταστασιμότητα
  - $A \sim B \Rightarrow [p, A;\ 1 - p, C] \gtrsim [p, B;\ 1 - p, C]$

Εάν είναι αδιάφορος μεταξύ *A* και *B*, τότε είναι αδιάφορος και μεταξύ πιο πολύπλοκων λοταριών που είναι ίδεις με την εξαίρεση ότι το B έχει πάρει τη θέση του A.

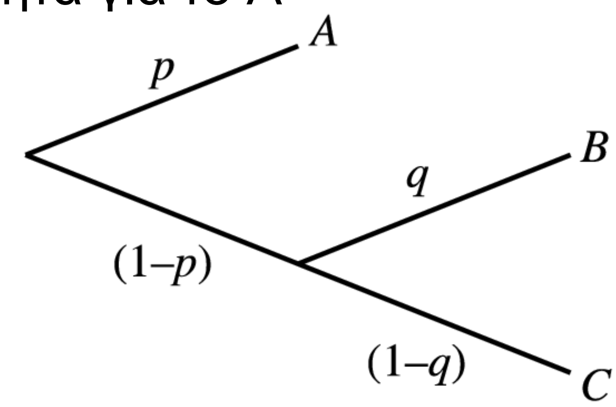
Αξιώματα της Θεωρίας Χρησιμοτήτων (2/2)

- Μονοτονικότητα
  - $A \succ B \Rightarrow (p \geq q \Leftrightarrow [p, A; 1 - p, B] \gtrsim [q, A; 1 - q, B])$

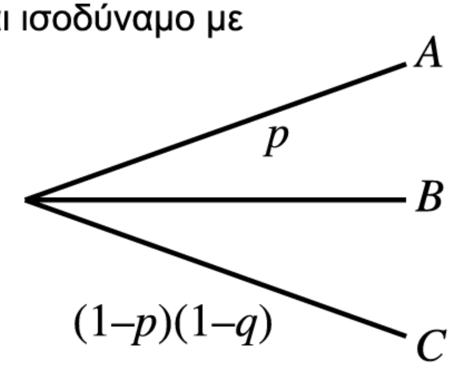
  Ο πράκτορας που προτιμά το Α από το Β, πρέπει να προτιμήσει τη λοταρία που έχει υψηλότερη πιθανότητα για το Α
- Αποσυνθεσιμότητα
  - $[p, A; 1 - p, [q, B; 1 - q, C]] \sim$
    $[p, A; (1 - p)q, B; (1 - p)(1 - q), C]$

  Η σύνθετες λοταρίες γίνονται

  Απλούστερες με χρήση πιθανοτήτων



Είναι ισοδύναμο με



Χρησιμότητα

- Αρχή της χρησιμότητας:
  - *U*(*A*) > *U*(*B*) $\Leftrightarrow$ *A* $\succ$ *B*

  Υπάρχει πραγματική συνάρτηση U, το A είναι προτιμότερο του B
  - *U*(*A*) = *U*(*B*) $\Leftrightarrow$ *A* ~ *B*

  Ο πράκτορας είναι αδιάφορος μεταξύ A και B

- Αρχή της μέγιστης αναμενόμενης χρησιμότητας:

Η χρησιμότητα μιας λοταρίας είναι το άθροισμα της πιθανότητας κάθε αποτελέσματος επί τη χρησιμότητα αυτού του αποτελέσματος.

$$U\left(\left[p_1, S_1; \ldots; p_n, S_n\right]\right) = \sum_i p_i U\left(S_i\right)$$

Συναρτήσεις χρησιμότητας

Η χρησιμότητα είναι μια συνάρτηση που απεικονίζει τις καταστάσεις σε πραγματικούς αριθμούς.

Η θεωρία χρησιμοτήτων έχει τις ρίζες της στα οικονομικά.

- Χρηματικές αξίες
- Αναμενόμενη χρηματική αξία:
  - [0,5, 3.000.000€; 0,5, 0€], [1,0, 1.000.000€]
- Αναμενόμενη χρησιμότητα:

$$EU(Αποδοχή) = \tfrac{1}{2}U(S_k) + \tfrac{1}{2}U(S_{k+3.000.000}),$$

$$EU(Απόρριψη) = U(S_{k+1.000.000})$$

Η χρησιμότητα δεν είναι ακριβώς ανάλογη με τη χρηματική αξία επειδή η χρησιμότητα — η θετική αλλαγή στον τρόπο ζωής — για το πρώτο σας εκατομμύριο είναι πολύ υψηλή, (ή τουλάχιστον έτσι λένε όλοι), ενώ η χρησιμότητα για ένα επιπλέον εκατομμύριο είναι πολύ μικρότερη.

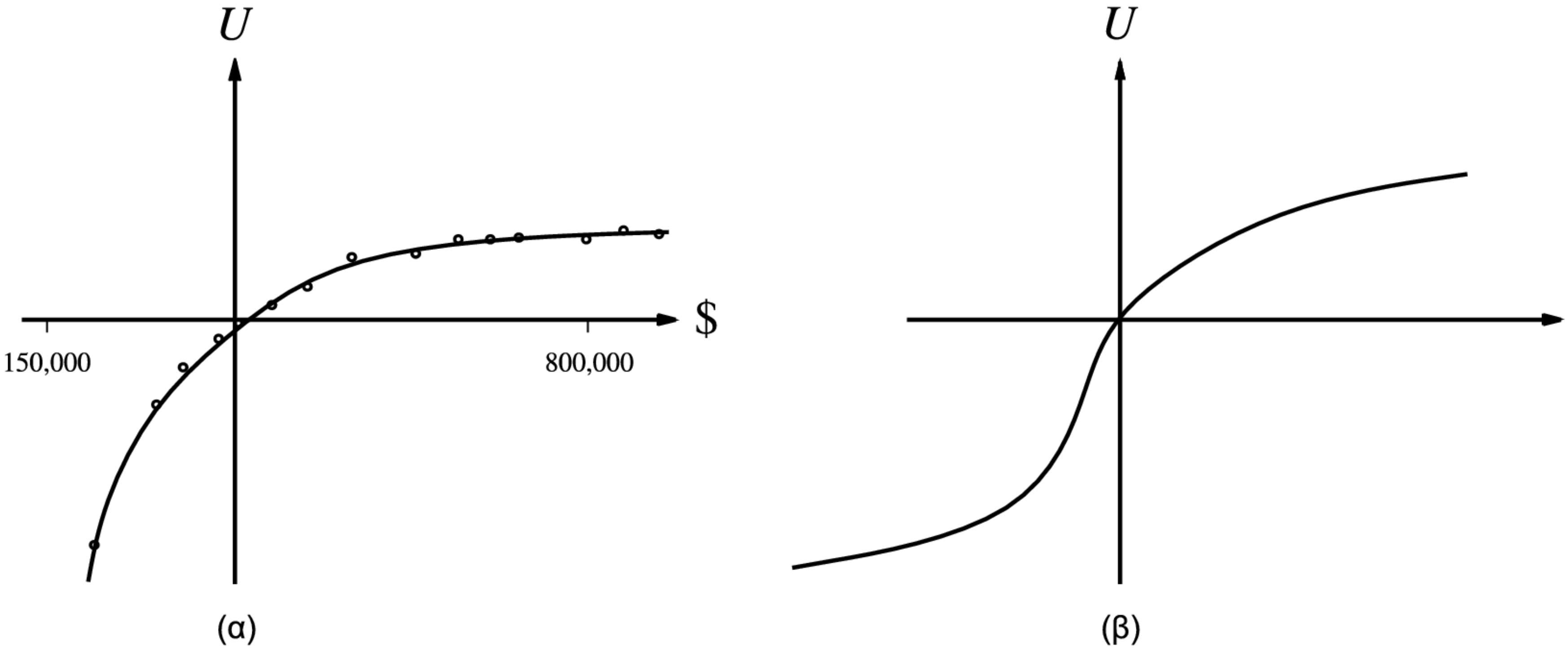
Ο Grayson (1960) ανακάλυψε ότι η χρησιμότητα των χρημάτων ήταν σχεδόν ακριβώς ανάλογη με το λογάριθμο του ποσού.

$U(S_k+_n) = -263{,}31 + 22{,}09 \log(n + 150.000)$

για το εύρος μεταξύ n = -$150,000 και n = $800.000.

Χρησιμότητα των χρημάτων

- Προσέγγιση με λογάριθμο: $U(M)=a \cdot \log(b+c \cdot M)$



- Αποστροφή/Επιζήτηση/Ουδετερότητα ρίσκου
- Βέβαιο ισοδύναμο
- Ασφάλιστρο

- Οι πράκτορες με καμπύλες αυτού του σχήματος **αποστρέφονται το ρίσκο** (risk-averse): προτιμούν κάτι σίγουρο με απολαβή μικρότερη από την αναμενόμενη χρηματική αξία του ρίσκου.
- Από την άλλη πλευρά, στην "απελπισμένη" περιοχή με μεγάλη αρνητική περιουσία, η συμπεριφορά είναι η **επιζήτηση του ρίσκου** (risk-seeking).
- Η αξία που θα αποδεχθεί ένας πράκτορας έναντι της λοταρίας ονομάζεται **βέβαιο ισοδύναμο** (certainty equivalent) της λοταρίας.
- Οι μελέτες έχουν δείξει ότι οι περισσότεροι άνθρωποι θα αποδεχθούν περίπου 400 € στη θέση ενός ρίσκου που τους αποφέρει 1.0006 τις μισές φορές και 0€ τις υπόλοιπες — με άλλα λόγια, το βέβαιο ισοδύναμο της λοταρίας είναι 400€.

- Η διαφορά μεταξύ της αναμενόμενης χρηματικής αξίας μιας λοταρίας και του βέβαιου ισοδύναμού της ονομάζεται **ασφάλιστρο** (insurance premium).
- Η αποστροφή του κινδύνου είναι η βάση της ασφαλιστικής βιομηχανίας, επειδή σημαίνει ότι τα ασφάλιστρα είναι θετικά. Οι άνθρωποι προτιμούν να καταβάλλουν ένα μικρό ασφάλιστρο αντί να ρισκάρουν την αξία του σπιτιού τους έναντι της πιθανότητας πυρκαγιάς.
- Από την πλευρά της ασφαλιστικής εταιρείας, η αξία του σπιτιού είναι πολύ μικρή, σε σύγκριση με το συνολικό απόθεμα κεφαλαίου της εταιρείας.
- Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη χρησιμότητας του ασφαλιστή είναι σχεδόν ευθεία σε μια τέτοια μικρή περιοχή, και το ρίσκο δεν στοιχίζει σχεδόν τίποτα στην εταιρεία.

Κλίμακες χρησιμότητας

$U'(S) = k_1 + k_2 U(S)$,

Αυτός ο γραμμικός μετασχηματισμός δεν μεταβάλλει τη συμπεριφορά του πράκτορα.

Ένας πράκτορας σε αιτιοκρατικό περιβάλλον θεωρείται ότι έχει μια **συνάρτηση αξίας** (value function) ή **διατακτική συνάρτηση χρησιμότητας** (ordinal utility function), η συνάρτηση ουσιαστικά παρέχει μόνο ταξινομήσεις των καταστάσεων, αντί για αριθμητικές τιμές με κάποιο νόημα.

Κλίμακες χρησιμότητας

- Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί:
  - $U'(S) = k_1 + k_2 U(S)$
- Κανονικοποιημένες χρησιμότητες
  - Στο διάστημα [$u_\perp = 0$, $u_\top = 1$]
- Πρότυπη λοταρία (standard lottery)
  - $[p, u_\top; (1 - p), u_\perp]$
- Αξία ανθρώπινης ζωής
  - micromort, πιθανότητα θανάτου μία στο εκατομμύριο
  - QALY, quality-adjusted life year

Κλίμακες χρησιμότητας

- Η θεωρία αποφάσεων είναι **κανονιστική** (normative) θεωρία: περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο *θα πρέπει* να ενεργήσει ένας ορθολογικός πράκτορας.

- Η εφαρμογή της οικονομικής θεωρίας θα ενισχυόταν κατά πολύ εάν ήταν επίσης και **περιγραφική** (descriptive) θεωρία της πραγματικής λήψης αποφάσεων από τους ανθρώπους. Παρόλα αυτά, υπάρχουν πειραματικά δεδομένα τα οποία υποδηλώνουν ότι οι άνθρωποι παραβιάζουν συστηματικά τα αξιώματα της θεωρίας χρησιμοτήτων.

Κλίμακες χρησιμότητας

Στα άτομα που συμμετείχαν σε αυτό το πείραμα ζητήθηκε να κάνουν μια επιλογή μεταξύ των λοταριών A και B και στη συνέχεια μεταξύ των λοταριών C και D:

A: 80% πιθανότητα για $4000	*C*: 20% πιθανότητα για $4000
B: 100% πιθανότητα για $3000	*D*: 25% πιθανότητα για $3000

Η πλειοψηφία των ατόμων προτίμησε το *B* από το *A* και το C από το *D.*

Αν όμως αποδώσουμε τιμή [U($0) = 0, τότε η πρώτη από αυτές τις επιλογές υποδηλώνει ότι 0,8U($4000) < (U($3000) ενώ η δεύτερη επιλογή υποδηλώνει ακριβώς το αντίθετο.

Για να το θέσουμε διαφορετικά, φαίνεται να μην υπάρχει συνάρτηση χρησιμότητας που να συμφωνεί με αυτές τις επιλογές.

Κλίμακες χρησιμότητας

Οι Kahneman και Tversky προχώρησαν στην ανάπτυξη μιας περιγραφικής θεωρίας που εξηγεί πώς οι άνθρωποι αποστρέφονται το ρίσκο σε συμβάντα υψηλής πιθανότητας, ενώ είναι πιο πρόθυμοι να ρισκάρουν περισσότερο για μη πιθανές απολαβές.

Κλίμακες χρησιμότητας

Έχουν γίνει κάποιες προσπάθειες για την εύρεση της αξίας που δίνουν οι άνθρωποι στις ίδιες τις ζωές τους.

Τα δύο συνηθισμένα "νομίσματα" που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση ιατρικών θεμάτων και θεμάτων ασφαλείας είναι το:

- micromort (πιθανότητα θανάτου μία στο εκατομμύριο) και
- το QALY, ή έτος ζωής προσαρμοσμένης ποιότητας (quality-adjusted life year, ισοδύναμο με ένα έτος καλής υγείας χωρίς αναπηρίες).

Πολυκριτηριακές συναρτήσεις χρησιμότητας

Πολυκριτηριακές συναρτήσεις χρησιμότητας

- Κάθε κριτήριο θεωρείται γενικά ότι έχει διακριτές ή συνεχείς βαθμωτές τιμές.
- Το κάθε κριτήριο ορίζεται με τέτοιον τρόπο ώστε, όταν όλα τα άλλα είναι ίσα, οι υψηλότερες αξίες του κριτηρίου να αντιστοιχούν σε υψηλότερες χρησιμότητες.
- Σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να είναι απαραίτητο να διαιρέσουμε σε τμήματα το εύρος των τιμών, έτσι ώστε η χρησιμότητα να ποικίλλει μονοτονικά μέσα σε κάθε εύρος τιμών.

Πολυκριτηριακές συναρτήσεις χρησιμότητας

Κυριαρχία

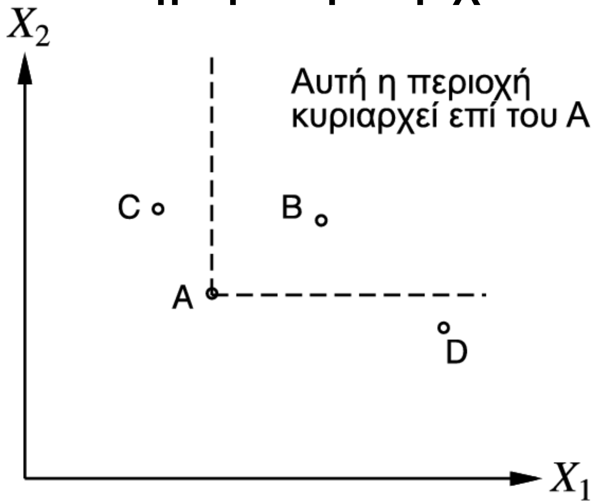
Το αεροδρόμιο S_1 κοστίζει λιγότερο, προκαλεί μικρότερη ηχορύπανση, και είναι ασφαλέστερο από το αεροδρόμιο S_2.

Δεν θα δίσταζε λοιπόν να απορρίψει κανείς το S_2 .

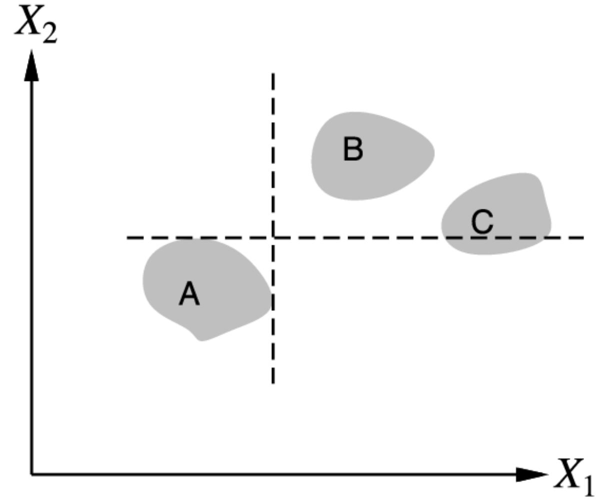
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι υπάρχει **αυστηρή κυριαρχία** (strict dominance) του S_1 επί του S_2 **.**

Πολυκριτηριακές συναρτήσεις χρησιμότητας

- Διάνυσμα κριτηρίων: $\mathbf{X} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$
- Αυστηρή κυριαρχία



(α)



(β)

- Στο α) η επιλογή A κυριαρχείται αυστηρά από τη B αλλά όχι από την C ή D.
- Στο β) το A κυριαρχείται αυστηρά από την περιοχή B αλλά όχι από την περιοχή C

Στοχαστική κυριαρχία

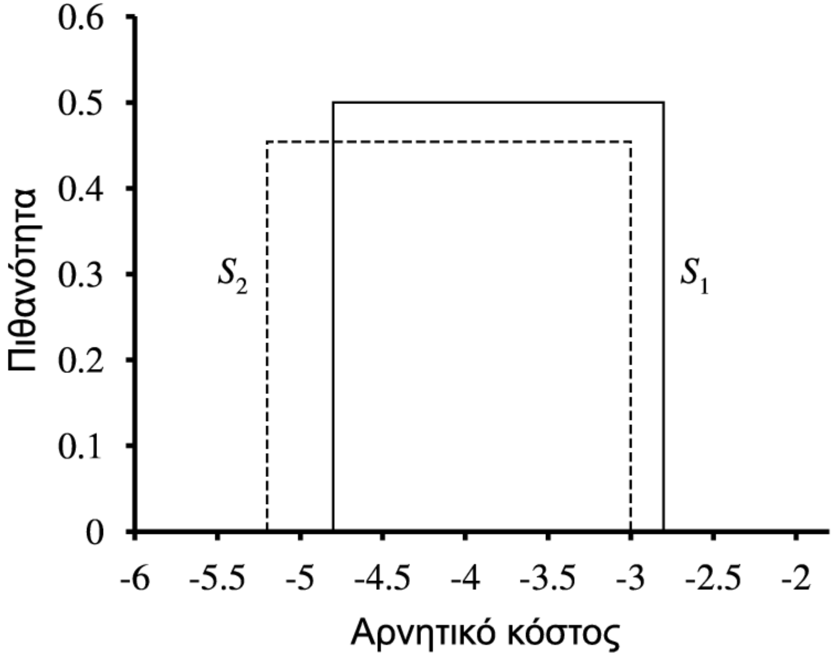
- Υπάρχει μια ακόμα πιο χρήσιμη γενίκευση που ονομάζεται στοχαστική κυριαρχία (stochastic dominance), η οποία συμβαίνει πολύ συχνά στα πραγματικά προβλήματα.
- Έστω ότι το κόστος κατασκευής ενός αεροδρομίου είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο:
  - Θέση S_1: U[2,8·10^6 €, 4,8·10^6 €]
  - Θέση S_2: U[3,0·10^6 €, 5,2·10^6 €]
- Στην περίπτωση αυτή, με δεδομένη μόνο την πληροφορία ότι η χρησιμότητα φθίνει με το κόστος, μπορούμε να πούμε ότι η θέση S_1 κυριαρχεί στοχαστικά της S_2 (δηλαδή, η S_2 μπορεί να απορριφθεί). Είναι σημαντικό να προσέξουμε ότι αυτό *δεν* απορρέει από τη σύγκριση του αναμενόμενου κόστους.

Στοχαστική κυριαρχία

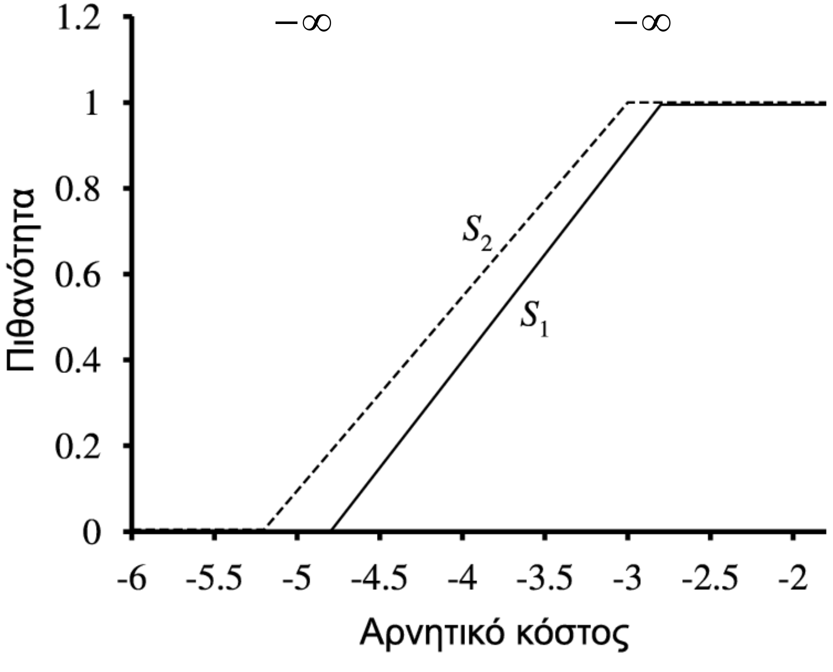
- Η Εικόνα δείχνει αυτές τις κατανομές, με το κόστος να σχεδιάζεται ως αρνητική αξία.
- Κόστος κατασκευής αεροδρομίου:
  - Θέση S_1: U[2,8·10^6 €, 4,8·10^6 €](x)
  - Θέση S_2: U[3,0·10^6 €, 5,2·10^6 €](x)
  - Η χρησιμότητα φθίνει με το κόστος

Σωρευτικές κατανομές:

$$\forall x \quad \int_{-\infty}^{x} p_1(x')dx' \le \int_{-\infty}^{x} p_2(x')dx'$$



(α)



(β)

Στοχαστική κυριαρχία

Η ακριβής σχέση μεταξύ των κατανομών των κριτηρίων που απαιτούνται για την επίτευξη στοχαστικής κυριαρχίας είναι πιο εμφανής εάν εξετάσουμε τις σωρευτικές (cumulative) κατανομές.

Η σωρευτική κατανομή μετρά την πιθανότητα να είναι το κόστος μικρότερο ή ίσο από οποιοδήποτε δεδομένο ποσό — δηλαδή, αποτελεί το ολοκλήρωμα της αρχικής κατανομής.

Εάν η σωρευτική κατανομή για τη θέση S_1 βρίσκεται πάντοτε στα δεξιά της σωρευτικής κατανομής για τη θέση S_2, τότε, από στοχαστική άποψη, η θέση S_1 είναι φθηνότερη από την S_2.

Στοχαστική κυριαρχία

Για να το διατυπώσουμε τυπικά, εάν δύο ενέργειες A_1 και A_2 οδηγούν σε κατανομές πιθανοτήτων $p_1(x)$ και $p_2(x)$ ως προς το κριτήριο X, τότε η A_1 κυριαρχεί στοχαστικά έναντι της A_2 στο X εάν ισχύει:

$$\forall x \quad \int_{-\infty}^{x} p_1(x')dx' \leq \int_{-\infty}^{x} p_2(x')dx'$$

Εάν το A_1 κυριαρχεί στοχαστικά έναντι του A_2, τότε για οποιαδήποτε μονοτονικά μη φθίνουσα συνάρτηση χρησιμότητας $U(x)$ η αναμενόμενη χρησιμότητα του A_1 είναι τουλάχιστον εξίσου υψηλή με την αναμενόμενη χρησιμότητα του A_2.

Συνεπώς, εάν μια ενέργεια κυριαρχείται στοχαστικά από κάποια άλλη ως προς όλα τα κριτήρια, τότε μπορεί να απορριφθεί.

Στοχαστική κυριαρχία

Έστω, για παράδειγμα, ότι το κόστος κατασκευής εξαρτάται από την απόσταση από τα πληθυσμιακά κέντρα.

Εάν η θέση S_1 είναι λιγότερο απομακρυσμένη από την S_2, τότε η S_1 θα κυριαρχεί της S_2 ως προς το κόστος.

Αν και δεν θα τους παρουσιάσουμε εδώ, υπάρχουν αλγόριθμοι για τη διάδοση τέτοιου είδους ποιοτικών πληροφοριών μεταξύ αβέβαιων μεταβλητών σε **ποιοτικά πιθανοτικά δίκτυα** (qualitative probabilistic networks), οι οποίοι επιτρέπουν σε ένα σύστημα να πάρει ορθολογικές αποφάσεις με βάση την στοχαστική κυριαρχία χωρίς να χρησιμοποιήσει αριθμητικές τιμές.

Δομή προτίμησης και πολυκριτηριακή χρησιμότητα

Έστω ότι έχουμε ***n*** κριτήρια, κάθε ένα από τα οποία έχει ***d*** διακριτές τιμές.

Για να προσδιορίσουμε την πλήρη συνάρτηση χρησιμότητας $U(x_1, \ldots, \chi_n)$ χρειαζόμαστε d^n τιμές στη χειρότερη περίπτωση.

Αυτή η χειρότερη περίπτωση αντιστοιχεί σε μια περίπτωση στην οποία οι προτιμήσεις του πράκτορα δεν έχουν καθόλου κανονικότητα.

Δομή προτίμησης και πολυκριτηριακή χρησιμότητα

Η βασική προσέγγιση συνίσταται στο να εντοπίσουμε κανονικότητα στη συμπεριφορά προτιμήσεων που θα περιμέναμε να δούμε, και να χρησιμοποιήσουμε τα επονομαζόμενα **θεωρήματα αναπαράστασης** (representation theorems) ώστε να δείξουμε ότι ένας πράκτορας με ένα συγκεκριμένο είδος δομής προτίμησης έχει συνάρτηση χρησιμότητας :

$$U(x_1 \ldots, x_n) = f\,[f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)]$$

Προτιμήσεις χωρίς αβεβαιότητα

Η βασική κανονικότητα που προκύπτει στις αιτιοκρατικές δομές προτίμησης ονομάζεται **ανεξαρτησία προτιμήσεων.**

Δύο κριτήρια X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητα ως προς την προτίμηση από ένα τρίτο κριτήριο X_3 εάν η προτίμηση μεταξύ των αποτελεσμάτων (x_1, x_2, x_3) και (x'_1, x'_2, x'_3) δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή x_3 του κριτηρίου X_3.

Προτιμήσεις χωρίς αβεβαιότητα

- Για παράδειγμα, εάν προτιμάμε μια πόλη 20.000 κατοίκων εντός του αεροδιαδρόμου και κόστος κατασκευής 4 δισεκατομμύρια € από μια πόλη 70.000 κατοίκων εντός του αεροδιαδρόμου και κόστος κατασκευής 3,7 δισεκατομμύρια €, με το επίπεδο ασφάλειας είναι να 0,06 θάνατοι ανά ένα εκατομμύριο μίλια μεταφοράς επιβατών και στις δύο περιπτώσεις, τότε θα έχουμε την ίδια προτίμηση και όταν το επίπεδο θανάτων είναι 0,13 ή 0,01.
- Η ίδια ανεξαρτησία θα ίσχυε για προτιμήσεις μεταξύ οποιουδήποτε άλλου ζεύγους τιμών για τα κριτήρια *Θόρυβος* και *Κόστος.*

Προτιμήσεις χωρίς αβεβαιότητα

- Είναι επίσης εμφανές ότι τα κριτήρια *Κόστος* και *Θάνατοι* είναι ανεξάρτητα ως προς την προτίμηση από το κριτήριο *Θόρυβος,*
- καθώς και ότι τα κριτήρια *Θόρυβος* και *Θάνατοι* είναι ανεξάρτητα ως προς την προτίμηση από το κριτήριο *Κόστος.*
- Λέμε ότι το σύνολο κριτηρίων *{Θόρυβος, Κόστος, Θάνατοι}* παρουσιάζει **αμοιβαία ανεξαρτησία προτιμήσεων** (mutual preference independence, MPI).
- *Εάν τα κριτήρια X_1, X_2 , ..., X_n παρουσιάζουν αμοιβαία ανεξαρτησία προτιμήσεων, τότε η συμπεριφορά προτίμησης του πράκτορα μπορεί να περιγραφεί ως μεγιστοποίηση της συνάρτησης:*

$$V(x_1, ..., x_n) = \sum_i V_i(x_i)$$

όπου κάθε V_i είναι μια συνάρτηση αξίας που αναφέρεται μόνο στο κριτήριο X_i .

Προτιμήσεις χωρίς αβεβαιότητα

Για παράδειγμα, ενδεχομένως να μπορεί να ληφθεί η απόφαση για τη θέση του αεροδρομίου με χρήση της συνάρτησης αξίας

V(θόρυβος, κόστος, θάνατοι) =-θόρυβος x 10^4 - *κόστος* - *θάνατοι* χ 10^{12}

Μια συνάρτηση αξίας αυτού του τύπου ονομάζεται **προσθετική συνάρτηση** αξίας (additive value function). Οι προσθετικές συναρτήσεις είναι ένας εξαιρετικά φυσικός τρόπος περιγραφής της συνάρτησης αξίας.

Δομή προτιμήσεων

- Κανονικότητα στη δομή των προτιμήσεων:
  - $U(x_1, \ldots, x_n) = f\,[\, f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)\,]$

    όπου η f είναι συνήθως η πρόσθεση.

- Ανεξαρτησία προτιμήσεων (X_1,X_2) ως προς το X_3:
  - (x_1, x_2, x_3) και (x'_1, x'_2, x_3): Η προτίμηση δεν εξαρτάται από το x_3.

- Αμοιβαία ανεξαρτησία προτιμήσεων:

$$V(X_1, \ldots, X_n) = \sum_i V_i(X_i)$$

Προτιμήσεις με αβεβαιότητα

- Ένα σύνολο κριτηρίων παρουσιάζει **αμοιβαία ανεξαρτησία χρησιμότητας** (mutually utility-independence, MUI) εάν όλα τα υποσύνολά του είναι ανεξάρτητα ως προς τη χρησιμότητα από τα υπόλοιπα κριτήρια.
- Και πάλι, είναι λογικό να προτείνουμε ότι τα κριτήρια του αεροδρομίου παρουσιάζουν σχέση MUI.

Προτιμήσεις με αβεβαιότητα

- Ανεξαρτησία χρησιμότητας:
  - Ένα σύνολο κριτηρίων **X** είναι ανεξάρτητο ως προς την χρησιμότητα από ένα σύνολο κριτηρίων **Y** εάν οι προτιμήσεις μεταξύ των λοταριών επί των κριτηρίων του **X** είναι ανεξάρτητες από τις συγκεκριμένες τιμές των κριτηρίων στο **Y**.
- Αμοιβαία ανεξαρτησία χρησιμότητας

- Πολλαπλασιαστική συνάρτηση χρησιμότητας

$$U = k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3 + k_1 k_2 U_1 U_2 + k_2 k_3 U_2 U_3 + k_3 k_1 U_3 U_1 + k_1 k_2 k_3 U_1 U_2 U_3$$