

Άσκηση

Το μαγνητικό πεδίο ενός επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται στο κενό δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{B} = 0,01 \cos(kz - 10^{10} \pi t) \hat{y}$$

Να υπολογιστούν:

1. Η περίοδος και μήκος κύματος
2. Η εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου
3. Το διάνυσμα Poynting
4. Η ένταση του κύματος

Λύση

Η εξίσωση του μαγνητικού πεδίου είναι: $\vec{B} = B_0 \cos(kz - \omega t) \hat{y}$
οπότε: $B_0 = 0,01 \text{ T}$ κα $\omega = 10^{10} \pi \text{ rad/s}$

1. Περίοδος και συχνότητα

Ισχύει: $\omega = 2\pi f$

άρα: $10^{10} \pi = 2\pi f$

οπότε: $f = \frac{10^{10}}{2} = 5 \times 10^9 \text{ Hz}$

Η περίοδος είναι: $T = \frac{1}{f}$

οπότε: $T = \frac{1}{5 \times 10^9} = 2 \times 10^{-10} \text{ s}$

Ισχύει: $c = \lambda f$

Άρα το μήκος κύματος είναι: $\lambda = c/f = \frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^9} = 6 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}$

2. Εξίσωση ηλεκτρικού πεδίου

Για ηλεκτρομαγνητικό κύμα στο κενό: $E_0 = cB_0$

Άρα: $E_0 = (3 \times 10^8)(0,01) = 3 \times 10^6 \text{ V/m}$

Ο κυματαριθμός είναι: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
 οπότε $k = \frac{2\pi}{6 \times 10^{-2}} = \frac{100\pi}{3} \text{ rad/m}$

Το κύμα διαδίδεται κατά τον άξονα z , ενώ το \vec{B} ταλαντώνεται στη διεύθυνση \hat{y} .
 Άρα το \vec{E} πρέπει να ταλαντώνεται στη διεύθυνση \hat{x} , ώστε: $\vec{E} \times \vec{B} \parallel \hat{z}$

Επομένως:
$$\vec{E} = 3 \times 10^6 \cos \left(\frac{100\pi}{3} z - 10^{10} \pi t \right) \hat{x}$$

3. Διάνυσμα Poynting

Το διάνυσμα Poynting είναι: $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$

Άρα: $\vec{S} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2 \left(\frac{100\pi}{3} z - 10^{10} \pi t \right) \hat{x} \times \hat{y}$

Επειδή: $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$

προκύπτει: $\vec{S} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2 \left(\frac{100\pi}{3} z - 10^{10} \pi t \right) \hat{z}$

Επειδή: $E_0 B_0 = (3 \times 10^6)(0,01) = 3 \times 10^4$

και $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

προκύπτει:
$$\vec{S} = \frac{3 \times 10^4}{4\pi \times 10^{-7}} \cos^2 \left(\frac{100\pi}{3} z - 10^{10} \pi t \right) \hat{z} \text{ W/m}^2$$

4. Ένταση του κύματος

Η μέση ένταση είναι: $I = \bar{S} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}$

Άρα: $I = \frac{3 \times 10^4}{2(4\pi \times 10^{-7})}$

οπότε:
$$I \simeq 1,19 \times 10^{10} \text{ W/m}^2$$