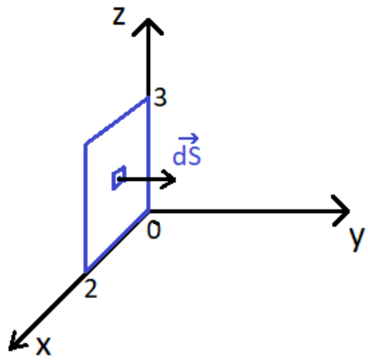
Άσκηση 1

Να βρεθεί το συνολικό ρεύμα που διαρρέει την επιφάνεια του σχήματος όταν η πυκνότητα φορτίου ισούται με $\vec{J} = az\hat{x} + bxy\hat{y}$

Λύση



Το ολικό ρεύμα θα δίνεται από το ολοκλήρωμα επιφάνειας

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Το διάνυσμα της πυκνότητας ρεύματος μας δίνεται. Το $\vec{dS}$=dxdz$\hat{y}$ καθώς είναι ένα διάνυσμα παράλληλο στον άξονα y και το μέτρο του είναι dxdz. Από το παραπάνω ολοκλήρωμα προκύπτει επομένως:

$$I = \iint_S \left(az\hat{x} + bxy\hat{y}\right) \cdot \left(dxdz\hat{y}\right)$$

αυτό είναι ένα εσωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων οπότε από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχω:

$$I = \iint_S bxydxdz$$

Για να απαλλαγώ από το ολοκλήρωμα επιφάνειας βάζω τα όρια ολοκήρωσης των αξόνων x και z, οπότε:

$$I = \iint_S bxydxdz = \int_{x=0}^{2} \int_{z=0}^{3} bxydxdz = by\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \left[z\right]_0^3 = by \times \frac{4}{2} \times 3 = 6by\ A$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί το συνολικό ρεύμα που διαρρέει τμήμα σφαιρικής επιφάνειας που οριοθετείται από τους εξής περιορισμούς: r=0.8m, π/2≤θ≤π και 0≤φ≤π όταν η πυκνότητα φορτίου στο μέσο δίνεται από την έκραση: $\vec{J} = \frac{400 sin\varphi}{2\pi(r^2+4)}\hat{r}$.

Λύση

Το ολικό ρεύμα θα δίνεται από το ολοκλήρωμα επιφάνειας

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Το διάνυσμα της πυκνότητας ρεύματος μας δίνεται. Το $\overrightarrow{dS}$ στην περίπτωση των σφαιρικών συντεταγμένων με σταθερό r αφού έχω τμήμα σφαιρικής επιφάνειας δίνεται από την έκφραση $\overrightarrow{dS}$=r^{2}sinθdθdφ$\hat{r}$. Επομένως το παραπάνω ολοκλήρωμα διαμορφώνεται ως:

$$I = \iint_S \left(\frac{400 \sin \varphi}{2\pi \left(r^2 + 4 \right)} \hat{r} \right) \cdot \left(r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r} \right)$$

Έχω 2 παράλληλα διανύσματα, επομένως το εσωτερικό τους γινόμενο γίνεται:

$$I = \iint_S \frac{400 \sin \varphi}{2\pi \left(r^2 + 4 \right)} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{400 r^2}{2\pi \left(r^2 + 4 \right)} \iint_S \sin \varphi \sin \theta d\theta d\varphi$$

Βάζω τα όρια ολοκλήρωσης για να απαλλαγώ από το ολοκλήρωμα επιφάνειας:

$$I = \frac{400 r^2}{2\pi \left(r^2 + 4 \right)} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \sin \varphi \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{400 r^2}{2\pi \left(r^2 + 4 \right)} \left[-\cos \varphi \right]_0^{\pi} \left[-\cos \theta \right]_{\pi/2}^{\pi}$$

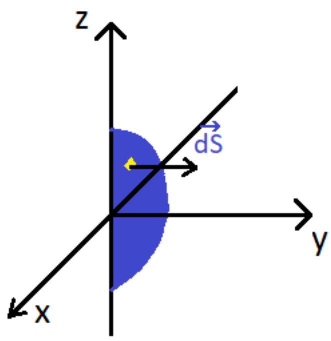
$$= \frac{400 r^2}{2\pi \left(r^2 + 4 \right)} 2 \times 1 = \frac{400 r^2}{\pi \left(r^2 + 4 \right)}$$

Αφού το r=0.8m αντικαθιστώ και παίρνω: I=256/(4.64π) A.

Άσκηση 3

Να βρεθεί το συνολικό ρεύμα που διαρρέει τον κυκλικό δίσκο ακτίνας 1m που βρίσκεται στο xz επίπεδο του σχήματος όταν η πυκνότητα ρεύματος δίνεται από την έκφραση $\vec{J} = 3\hat{x} + 4\hat{y} + 10x^2 z\hat{z}$.

Λύση



Το ολικό ρεύμα θα δίνεται από το ολοκλήρωμα επιφάνειας

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Το διάνυσμα της πυκνότητας ρεύματος μας δίνεται. Το $\overrightarrow{dS}$ στην περίπτωση των σφαιρικών συντεταγμένων αφού είναι παράλληλο στον άξονα y και πρόκειται για κυκλικό δίσκο δίνεται από την έκφραση $\overrightarrow{dS}$=rsinφdrdφ$\hat{y}$. Επομένως το παραπάνω ολοκλήρωμα διαμορφώνεται ως:

$$I = \iint_S \left(3\hat{x} + 4\hat{y} + 10x^2 z\hat{z} \right) \cdot \left(r \sin \varphi dr d\varphi \hat{y} \right)$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου παίρνω:

$$I = \iint_S 4r\sin\varphi drd\varphi = 4\iint_S r\sin\varphi drd\varphi$$

Τα όρια ολοκλήρωσης είναι 0≤φ≤π και 0≤r≤1:

$$I = 4\int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{\pi} r\sin\varphi drd\varphi = 4\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} = 8\,\mathrm{A}$$