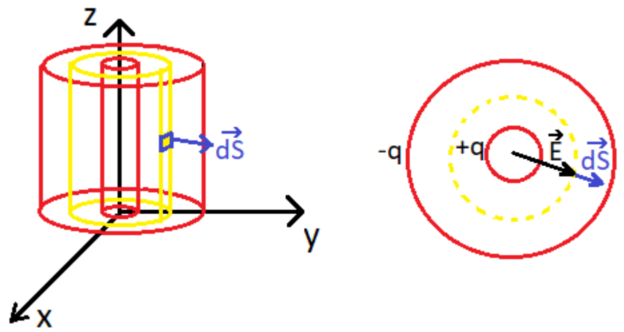
Άσκηση 1

Σε κυλινδρικό πυκνωτή ύψους h που οι οπλισμοί του φέρουν φορτίο q, να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του.

Λύση



Ο κύλινδρος στο σχήμα διαμορφώνεται ανάμεσα στις κόκκινες γραμμές, ενώ η κίτρινη γραμμή διαμορφώνει μια επιφάνεια Gauss, δηλαδή μια τυχαία κυλινδρική επιφάνεια ανάμεσα στους 2 οπλισμούς εντός του πυκνωτή, στον χώρο που θέλουμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο.

Θα κάνουμε χρήση του νόμου του Gauss:

$$\frac{Q}{\varepsilon_o} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό για το εσωτερικό γινόμενο $\vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}||d\vec{S}|\cos\theta$. Προσοχή το θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα E και dS. Εδώ αυτή η γωνία είναι 0 άρα το συνημίτονο είναι 1. Άρα $\vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}||d\vec{S}|1 = |\vec{E}||d\vec{S}|$

$$\frac{Q}{\varepsilon_o} = \oiint_S |\vec{E}||d\vec{S}| = \oiint_S \mathrm{E} dS$$

Στις κυλινδρικές συντεταγμένες, αφού το ρ είναι σταθερό, το dS δίνεται από τη σχέση: dS=ρdθdz. Προσοχή εδώ, το θ είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή που χρησιμοποιώ στις κυλινδρικές συντεταγμένες και δεν έχει σχέση με το θ που χρησιμοποίησα παραπάνω που προκύπτει από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου, άρα

$$\frac{Q}{\varepsilon_o} = \oiint_S \mathrm{E}\rho d\theta dz$$

Για να απαλλαγώ από το κλειστό ολοκλήρωμα επιφάνειας αντικαθιστώ τα όρια ολοκλήρωσης των θ και z οπότε:

$$\frac{Q}{\varepsilon_o} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{h} \mathrm{E}\rho d\theta dz = E\rho[\theta]_0^{2\pi}[z]_0^h = E\rho 2\pi h$$

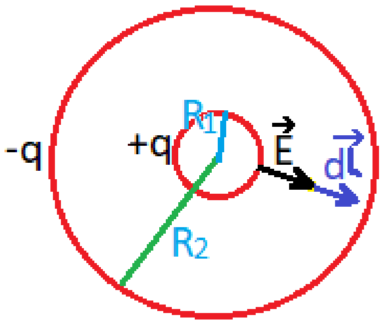
Λύνω ως προς E κα έχω

$$E = \frac{Q}{2\pi\rho h\varepsilon_o}$$

Άσκηση 2

Σε κυλινδρικό πυκνωτή με ακτίνα εσωτερικού πυκνωτή R_1 και εξωτερικού R_2 να υπολογισθεί η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή.

Λύση



Η διαφορά δυναμικού δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta V = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των δυο διανυσμάτων, επειδή τα διανύσματα είναι παράλληλα μεταξύ τους, είναι $\vec{E} \cdot d\vec{l} = |\vec{E}||d\vec{l}|\cos\theta = |\vec{E}||d\vec{l}|\cos 0 = \mathrm{E}dl$, άρα

$$\Delta V = \int_C \mathrm{E}dl$$

Το dl είναι κατά μήκος της ακτίνας ρ που μεταβάλλεται από R_1 ως R_2, οπότε για να απαλλαγώ από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αντικαθιστώ το dl με τη μεταβλητή dρ και παίρνω το ηλεκτρικό πεδίο όπως το υπολόγισα στην προηγούμενη άσκηση.

$E = \frac{Q}{2\pi\rho h\varepsilon_o}$, οπότε

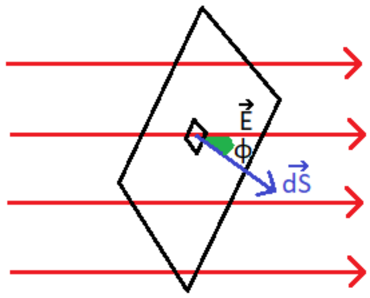
$$\Delta V = \int_C \mathrm{E}dl = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\rho h\varepsilon_o} d\rho = \frac{Q}{2\pi h\varepsilon_o} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho =$$

$$= \frac{Q}{2\pi h\varepsilon_o} [\ln\rho]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q(\ln R_2 - \ln R_1)}{2\pi h\varepsilon_o}$$

Άσκηση 3

Να υπολογισθεί η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από ορθογώνια επιφάνεια με πλευρές 2m και 3m που βρίσκεται μέσα σε σταθερό ομογενές πεδίο E=100N/Cb όταν η γωνία μεταξύ του διανύσματος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και του διανύσματος της επιφάνειας είναι 90˚ και 60˚.

Λύση



Η ηλεκτρική ροή δίνεται από το ολοκλήρωμα επιφάνειας

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Θα κάνω χρήση του ορισμού εσωτερικού γινομένου,

Επομένως:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_S \left|\vec{E}\right|\left|d\vec{S}\right|\cos\varphi$$

Όπου φ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και το διάνυσμα της επιφάνειας. Αφού έχω ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να γραφτεί:

$$\Phi_E = \iint_S \left|\vec{E}\right|\left|d\vec{S}\right|\cos\varphi = \iint_S \mathrm{E}dS\cos\varphi = \mathrm{E}\cos\varphi\iint_S dS$$

Μπορώ κατευθείαν να αντικαταστήσω το $\iint_S dS$ με το εμβαδόν του παραπάνω ορθογωνίου ή μπορώ να το τοποθετήσω στην αρχή των αξόνων και να το γράψω ως

$$\Phi_E = \mathrm{E}\cos\varphi\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2} dxdy = \mathrm{E}\cos\varphi\left[x\right]_0^2\left[y\right]_0^3 = E\cos\varphi 2\times 3 = 6E\cos\varphi$$

Διακρίνω 2 περιπτώσεις:

A) φ=90˚ οπότε cosφ=0 άρα Φ_E=0 Nm^2/Cb

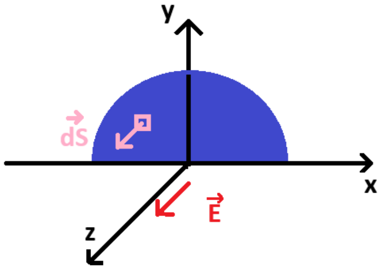
B) φ=60˚ οπότε cosφ=1/2 άρα Φ_E=6×100/2=300 Nm^2/Cb

Άσκηση 4

Ένας ημικυκλικός δίσκος ακτίνας Rβρίσκεται στο επίπεδο xy, με κέντρο την αρχή των αξόνων και με το καμπύλο μέρος του στο ημιεπίπεδο $y \geq 0$. Το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από το διάνυσμα $\vec{E}(x,y,z) = \alpha y\,\hat{z}$ όπου α είναι σταθερά.

Να υπολογιστεί η ηλεκτρική ροή του πεδίου μέσω του ημικυκλικού δίσκου.

Λύση



Η ηλεκτρική ροή είναι: $\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$

Εδώ: $\vec{E} = \alpha y\,\hat{z}$ και $\overrightarrow{dS} = dS\hat{z}$

Επομένως: $\Phi_E = \iint_S \alpha y\hat{z} \cdot dS\hat{z} = \iint_S \alpha y\, dS$

<u>Μετάβαση σε πολικές συντεταγμένες</u>

Στις πολικές συντεταγμένες: $y = r\sin\,\theta$ και $dS = r\,dr\,d\theta$

Για τον άνω ημικυκλικό δίσκο: $0 \le r \le R, 0 \le \theta \le \pi$

Άρα: $\Phi_E = \alpha \int_0^{\pi} \int_0^R (r\sin\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$

δηλαδή: $\Phi_E = \alpha \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \sin\,\theta\, dr\, d\theta$

Διαχωρίζουμε: $\Phi_E = \alpha \left(\int_0^R r^2\ dr\right) \left(\int_0^{\pi} \sin(\theta)\ d\theta\right)$

Υπολογίζουμε: $\int_0^R r^2\ dr = \frac{R^3}{3}$

Και $\int_0^{\pi} \sin\,\theta\, d\theta = [-\cos\,\theta]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$

Άρα: $\Phi_E = \alpha \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 2$