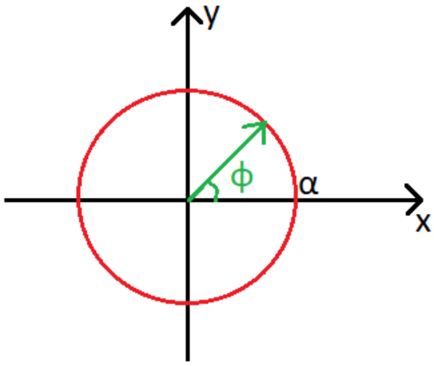
<u>Άσκηση 1</u>

Έστω κυκλικός δίσκος ακτίνας α που φέρει επιφανειακό φορτίο με πυκνότητα $\boldsymbol{\sigma = \sigma_o \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 cos^2\varphi}$ όπου 0≤r≤α και 0≤φ≤2π. Να βρεθεί το ολικό φορτίο του δίσκου.

<u>Λύση</u>



Έστω ο κυκλικός δίσκος του σχήματος.

Το ολικό φορτίο του δίσκου θα δίνεται αν υπολογίσω το ολοκλήρωμα επιφάνειας:

$$Q = \iint_S \sigma dS$$

Το dS πρέπει να το χρησιμοποιήσω σε κυκλικές συντεταγμένες καθώς και το σ μου δίνεται σε κυκλικές συντεταγμένες συναρτήσει της ακτίνας r και της γωνίας φ. Το dS σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι dS=rdrdφ. Αντικαθιστώ λοιπόν το σ και το dS στο ολοκλήρωμα:

$$Q = \iint_S \sigma_o \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos^2(\varphi) r dr d\varphi = \iint_S \sigma_o \left(\frac{r^3}{a^2}\right) \cos^2(\varphi) dr d\varphi$$

Αντικαθιστώ τα όρια ολοκλήρωσης 0≤r≤α και 0≤φ≤2π και μετατρέπω το ολοκλήρωμα επιφάνειας σε απλό ολοκλήρωμα

$$Q = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{0}^{\alpha} \sigma_o \left(\frac{r^3}{a^2}\right) \cos^2(\varphi) dr d\varphi$$

Τα σ_o και $1/\alpha^2$ είναι σταθερά και μπορούν να βγουν εκτός ολοκληρώματος

$$Q = \frac{\sigma_o}{a^2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{0}^{\alpha} r^3 \cos^2(\varphi) dr d\varphi$$

Τα r και φ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές και μπορώ να τις ολοκληρώσω ξεχωριστά

Επειδή $\displaystyle \int \cos^2(\varphi) d\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4}$

Έχω $\displaystyle Q = \frac{\sigma_o}{a^2} \int_{r=0}^{\alpha} r^3 dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi = \frac{\sigma_o}{a^2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\alpha} \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right]_0^{2\pi}$

Που με πράξεις μου δίνει $\displaystyle Q = \frac{\pi \sigma_o a^2}{4}$

Άσκηση 2

Έστω γραμμική πυκνότητα φορτίου λ=24y²mC/m. Να βρεθεί το ολικό φορτίο για y=-5 ως y=5.

Λύση

Το ολικό φορτίο γραμμικής πυκνότητας φορτίου δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$Q = \int_C \lambda dl$$

Μετατρέπω το λ σε μονάδες SI άρα $\lambda = 24y^2 mC/m = 24\times10^{-3} C/m$

Αντικαθιστώ το λ μέσα στο ολοκλήρωμα:

$$Q = \int_C 24\times10^{-3} y^2 dl$$

Η μόνη μεταβλητή που μεταβάλλεται είναι η y από -5 ως 5. Οπότε αντικαθιστώ μέσα στο ολοκλήρωμα και μετατρέπω το ολοκλήρωμα από ολοκλήρωμα καμπύλης σε απλό ολοκλήρωμα:

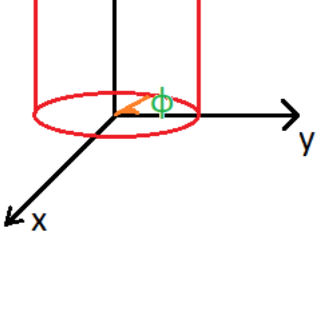
$$Q = \int_{y=-5}^{5} 24\times10^{-3} y^2 dy = 24\times10^{-3}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-5}^{5} = 24\times10^{-3}\left[\frac{5^3}{3} - \frac{(-5)^3}{3}\right] =$$

$$= 24\times10^{-3}\left[\frac{125}{3} - \frac{-125}{3}\right] = 2Cb$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί το ολικό φορτίο που περιέχεται σε κύλινδρο που ορίζεται από τις συντεταγμένες ρ≤2 και 0≤z≤3 όταν η χωρική πυκνότητα δίνεται από τη σχέση ρ'=20ρz

Λύση



Προσοχή, έχουμε γράψει τη χωρική πυκνότητα φορτίου με ρ' και την ανεξάρτητη μεταβλητή των κυλινδρικών συντεταγμένων ως απλό ρ.

Το ολικό φορτίο σε αυτήν την περίπτωση δίνεται από το ολοκλήρωμα όγκου:

$$Q = \iiint_V \rho' dV$$

Το dV στις κυλινδρικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση: **dV=ρdρdφdz.**

Αντικαθιστώ στο ολοκλήρωμα τη χωρική πυκνότητα ρ’ και το dV:

$Q=\iiint_V 20\rho z\rho d\rho d\varphi dz$ για να κάνω το ολοκλήρωμα όγκου απλό ολοκλήρωμα βάζω τα όρια ολοκλήρωσης:

$$Q=\int_{\rho=0}^{2}\int_{z=0}^{3}\int_{\varphi=0}^{2\pi} 20\rho z\rho d\rho d\varphi dz$$

Το φ το έβαλα από 0 ως 2π καθώς έχω έναν κανονικό κύλινδρο.

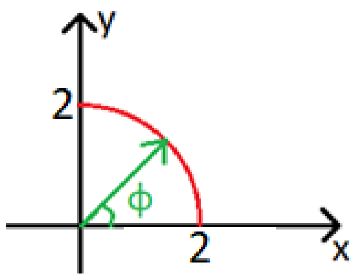
Η λύση του ολοκληρώματος είναι:

$$Q=\int_{\rho=0}^{2}\int_{z=0}^{3}\int_{\varphi=0}^{2\pi} 20\rho^2 z d\rho d\varphi dz = 20\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^3[\varphi]_0^{2\pi}=\frac{1540\pi}{3}Cb$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθεί το φορτίο τόξου κύκλου του σχήματος που φέρει γραμμική πυκνότητα φορτίου λ=3x Cb/m.

Λύση



Το ολικό φορτίο γραμμικής πυκνότητας φορτίου δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$Q=\int_C \lambda dl$$

Το dl στις κυκλικές συντεταγμένες με σταθερό r δίνεται από τη σχέση dl=rdϕ. Αντικαθιστώ στο ολοκλήρωμα το λ και το dl και έχω:

$$Q=\int_C 3xrd\varphi$$

Εδώ πρέπει να προσέξω ότι εμπλέκονται μεταβλητές από 2 διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων. Το x είναι από τις καρτεσιανές και τα r και ϕ είναι από τις πολικές. Πρέπει όλες να τις φέρω στο ίδιο σύστημα. Εδώ με συμφέρει να τα μετατρέψω όλα σε πολικές. Οπότε ισχύει ότι x=rcosϕ και y=rsinϕ. Αντικαθιστώ το x στο ολοκλήρωμα:

$$Q=\int_C 3r\cos\varphi rd\varphi$$

Καθώς το φ μεταβάλλεται από 0 ως π/2 διώχνω το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$Q = 3r^2 \int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = 3r^2 \left[\sin\varphi\right]_0^{\pi/2} = 3r^2 \left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] = 3r^2$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα r=2m. Οπότε Q=12Cb.