

Λυμένες Ασκήσεις (βασικές μαθηματικές εφαρμογές)

1) Πράξεις με διανύσματα – εσωτερικό & εξωτερικό γινόμενο

Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a} = 3\hat{x} + y\hat{z}$$

$$\vec{b} = \hat{y} - 4\hat{z}$$

Μετατροπή σε καρτεσιανές συνιστώσες (συντεταγμένες) (χρήσιμο να γίνεται πάντα για να είναι εύκολα διακριτές οι συντεταγμένες των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$)

$$\vec{a} = (3, 0, y)$$

$$\vec{b} = (0, 1, -4)$$

Άθροισμα / διαφορά (κατά συνιστώσες):

$$\vec{a} + \vec{b} = (3+0, 0+1, y+(-4)) = (3, 1, y-4)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (3-0, 0-1, y-(-4)) = (3, -1, y+4)$$

Εσωτερικό γινόμενο:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + y \cdot (-4) = -4y$$

Εξωτερικό γινόμενο (χρήση ορίζουσας 3x3):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3 & 0 & y \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}(0 \cdot (-4) - y \cdot 1) - \hat{y}(3 \cdot (-4) - y \cdot 0) + \hat{z}(3 \cdot 1 - 0 \cdot 0)$$

$$= \hat{x}(-y) - \hat{y}(-12) + \hat{z}(3)$$

$$= -y\hat{x} + 12\hat{y} + 3\hat{z}$$

2) Πράξεις με παραμετρικά διανύσματα

Δίνονται:

$$\vec{a} = y\hat{x} + 3\hat{y} + \hat{z} \text{ και } \vec{b} = x\hat{x} - 2\hat{z}$$

(Προσοχή αυτό το y είναι μεταβλητή και παίρνει τιμές που ανήκουν στους πραγματικούς αριθμούς. Δεν έχει σχέση με το \hat{y} που είναι διάνυσμα πάνω στον άξονα y και με μέτρο 1.)

Σε συνιστώσες:

$$\vec{a} = (y, 3, 1) \text{ και } \vec{b} = (x, 0, -2)$$

Άθροισμα:

$$\vec{a} + \vec{b} = (y+x, 3+0, 1+(-2)) = (x+y, 3, -1) = (x+y)\hat{x} + 3\hat{y} - \hat{z}$$

Εσωτερικό γινόμενο:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = y \cdot x + 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = xy - 2$$

Εξωτερικό γινόμενο:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ y & 3 & 1 \\ x & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}(3 \cdot (-2) - 1 \cdot 0) - \hat{y}(y \cdot (-2) - 1 \cdot x) + \hat{z}(y \cdot 0 - 3 \cdot x) =$$

$$= \hat{x}(-6) - \hat{y}(-2y - x) + \hat{z}(-3x) =$$

$$= -6\hat{x} + (x+2y)\hat{y} - 3x\hat{z}$$

3) Μερικές παράγωγοι και ολική παράγωγος

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x,y) = x^3 - x^2y + \sin(xy)$$

Αν $x=x(t)$, $y=y(t)$, τότε η ολική παράγωγος ως προς t είναι:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Υπολογίζουμε πρώτα τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial(-x^2y)}{\partial x} + \frac{\partial \sin(xy)}{\partial x} = 3x^2 - 2xy + \cos(xy) \cdot \frac{\partial xy}{\partial x} = 3x^2 - 2xy + \cos(xy) \cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial x^3}{\partial y} + \frac{\partial(-x^2y)}{\partial y} + \frac{\partial \sin(xy)}{\partial y} = 0 - x^2 + \cos(xy) \cdot \frac{\partial xy}{\partial y} = 0 - x^2 + \cos(xy) \cdot x$$

Άρα:

$$\frac{df}{dt} = (3x^2 - 2xy + y\cos(xy)) \cdot \frac{dx}{dt} + (-x^2 + x\cos(xy)) \cdot \frac{dy}{dt}$$

4) Μερικές παράγωγοι 1ης και 2ης τάξης

Δίνεται μια τυχαία συνάρτηση:

$$f(x,y) = 2x^2 + y^3$$

Πρώτες μερικές παράγωγοι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(2x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(y^3)}{\partial x} = 4x + 0 = 4x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(2x^2)}{\partial y} + \frac{\partial(y^3)}{\partial y} = 0 + 3y^2 = 3y^2$$

Δεύτερες μερικές παράγωγοι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(4x)}{\partial x} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(3y^2)}{\partial y} = 6y$$

5) Κλίση (gradient) συνάρτησης

Δίνεται:

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y$$

Ο τελεστής κλίσης είναι:

$$\vec{\nabla} ::= \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

(Ο τελεστής από μόνος του δεν έχει νόημα. Πρέπει στο :: να μπει μια συνάρτηση)

Η κλίση της συνάρτησης f είναι

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial(2x^2 + 3y)}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial(2x^2 + 3y)}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial(2x^2 + 3y)}{\partial z} \hat{z}$$

$$\frac{\partial(2x^2 + 3y)}{\partial x} = 4x$$

$$\frac{\partial(2x^2 + 3y)}{\partial y} = 3$$

$$\frac{\partial(2x^2 + 3y)}{\partial z} = 0$$

$$\text{Άρα } \vec{\nabla} f(x,y) = 4x\hat{x} + 3\hat{y} + 0\hat{z} = 4x\hat{x} + 3\hat{y}$$

(Το αποτέλεσμα είναι ένα διάνυσμα.)

6) Απόκλιση (divergence) διανυσματικού πεδίου

Δίνεται το διανυσματικό πεδίο:

$$\vec{A} = x^2\hat{x} - 4\hat{z}$$

Ο τελεστής απόκλισης είναι:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} ::= \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

$$\text{Εδώ: } A_x = x^2, A_y = 0, A_z = -4 \text{ ή } \vec{A} = (x^2, 0, -4)$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial (-4)}{\partial z} \\ &= 2x + 0 + 0 = 2x \end{aligned}$$

(Το αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός.)

7) Στροφή (curl) διανυσματικού πεδίου

Δίνεται το διανυσματικό πεδίο:

$$\vec{A} = z^2 \hat{x} - 4z \hat{z}$$

Ο τελεστής στροφής είναι:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vdots_x & \vdots_y & \vdots_z \end{vmatrix}$$

Άρα

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & 0 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x} \left(\frac{\partial(-4)}{\partial y} - \frac{\partial(0)}{\partial z} \right) - \hat{y} \left(\frac{\partial(-4)}{\partial x} - \frac{\partial(z^2)}{\partial z} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(z^2)}{\partial y} \right)$$

$$= \hat{x}0 - \hat{y}(-2z) + \hat{z}0 = 2z \hat{y}$$

8) Ορισμένο ολοκλήρωμα συνάρτησης κατά τμήματα στο \mathbb{R}

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 7 & -1 < x < 5 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ζητείται το ολοκλήρωμα στο \mathbb{R} :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Επειδή $f(x)=0$ εκτός του $(-1, 5)$, το ολοκλήρωμα περιορίζεται εκεί:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-1}^5 (4x^2 - 7) dx =$$

$$= \int_{-1}^5 (4x^2) dx - \int_{-1}^5 (7) dx =$$

$$= \left[\frac{4x^3}{3} \right]_{-1}^5 - [7x]_{-1}^5 =$$

$$= \frac{4(5)^3}{3} - \frac{4(-1)^3}{3} - (7(5) - 7(-1)) =$$

$$= (500/3 - 35) - (4/3 - 7) = 412/3$$