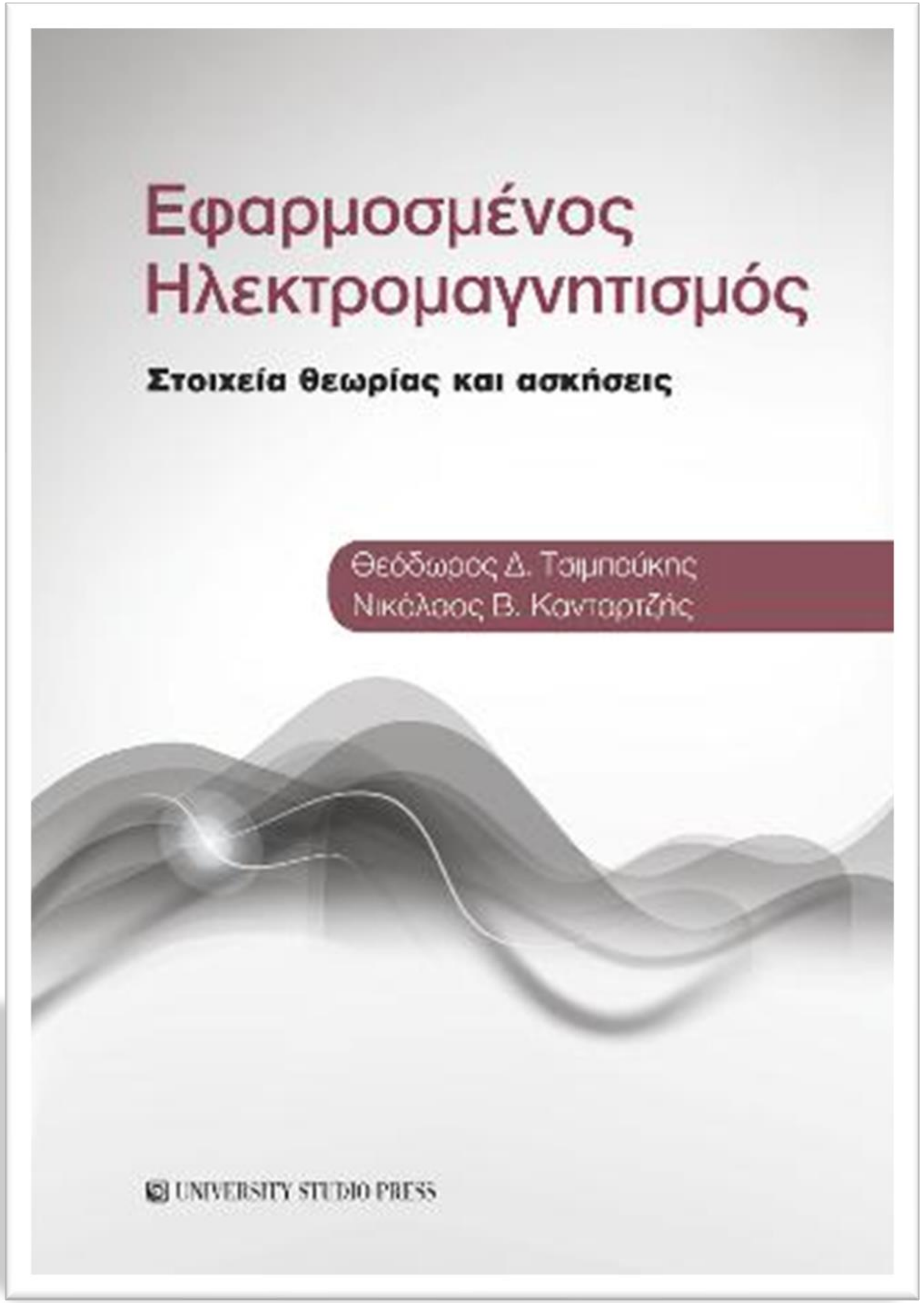
# ΑΡΧΕΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Τσορμπατζόγλου Ανδρέας

| | | |
|---|---|---|
| Ώρες μαθήματος: | **Πέμπτη** | 13:00-16:00, Αμφιθέατρο Α |
| | **Παρασκευή** | 13:00-14:00, Αμφιθέατρο Α |

# Προτεινόμενο βιβλίο



# Διαδικαστικά

Στο μάθημα θα δοθούν 2 πρόοδοι:

- 1η Πρόοδος: Πέμπτη 27 Μαρτίου 13:00-15:00 (Μπορεί να αλλάξει)
- 2η Πρόοδος: Πέμπτη 29 Μαΐου 13:00-15:00 (Μπορεί να αλλάξει)
- Για να μπορεί να συμμετάσχει κάποιος στη 2η πρόοδο θα πρέπει να έχει πάρει στην 1η πρόοδο βαθμό ≥ 5.
- Εφόσον ο βαθμός και τη 2ης προόδου είναι ≥5 ο/η φοιτητής/φοιτήτρια απαλλάσσεται από τις εξετάσεις.
- Οι πρόοδοι θα περιέχουν 4 ερωτήσεις θεωρίας πολλαπλής επιλογής με αρνητική βαθμολογία (-0.5) που θα δίνουν συνολικά 4 βαθμούς και 2 ασκήσεις που θα δίνουν συνολικά 6 βαθμούς.
- Το ίδιο θα ισχύει και για τις εξετάσεις.
- Στο τέλος κάθε αναρτημένης διάλεξης στην ασύγχρονη υπάρχουν ερωτήσεις από τις οποίες θα προέρχονται οι ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής των προόδων και της εξεταστικής.

# Περιεχόμενο Μαθήματος

- Ηλεκτροστατικό πεδίο (βασικοί νόμοι, ηλεκτρική ροή)
- Κατανομή φορτίων, διηλεκτρικά
- Βασικές εξισώσεις ηλεκτρικού πεδίου, ροή ρεύματος
- Μαγνητοστατικό πεδίο (βασικοί νόμοι, μαγνητική ροή)
- Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή
- Κίνηση φορτίων
- Εξισώσεις Maxwell
- Επίπεδο κύμα
- Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία
- Οδηγούμενο κύμα κυματοδηγοί

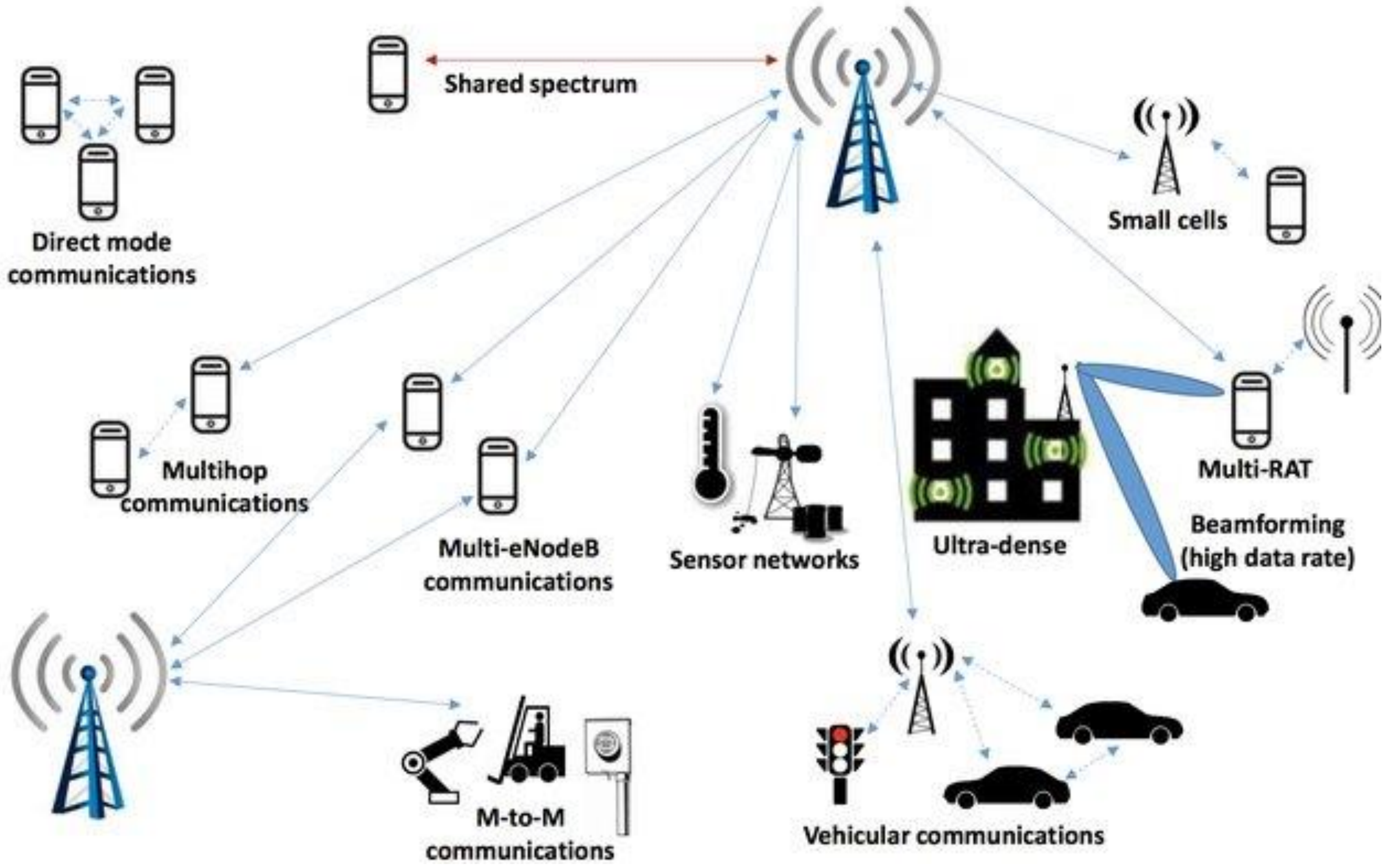
# Τηλεπικοινωνίες

Με τον γενικό όρο **τηλεπικοινωνίες**, (telecommunications), χαρακτηρίζεται η κάθε μορφής ενσύρματη, ασύρματη ή οπτική επικοινωνία που πραγματοποιείται ανεξαρτήτως απόστασης.

# Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία

- Η **Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία** είναι εκπομπή στον χώρο ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας υπό μορφή κυμάτων που ονομάζονται ηλεκτρομαγνητικά κύματα.
- Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι συγχρονισμένα ταλαντούμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία τα οποία ταλαντώνονται σε κάθετα επίπεδα μεταξύ τους και κάθετα προς την διεύθυνση διάδοσης. Διαδίδονται στο κενό με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός (c=299.792.458 m/s) αλλά και μέσα στην ύλη με ταχύτητα λίγο μικρότερη απ' την ταχύτητα του φωτός.

# 5G network architecture as illustrated in Public Safety Perspective: A 5G Worldview by National Institute for Standards and Technology



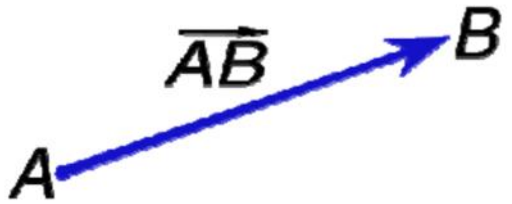
# Μαθηματικός Φορμαλισμός

# Διανύσματα στο Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων

Ένα διάνυσμα είναι ταυτόχρονα

→ ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία, Α και Β

→ ένα ευθύγραμμο τμήμα που μας δηλώνει αν πηγαίνουμε από το Α στο Β ή από το Β στο Α, δηλαδή έχει κατεύθυνση.

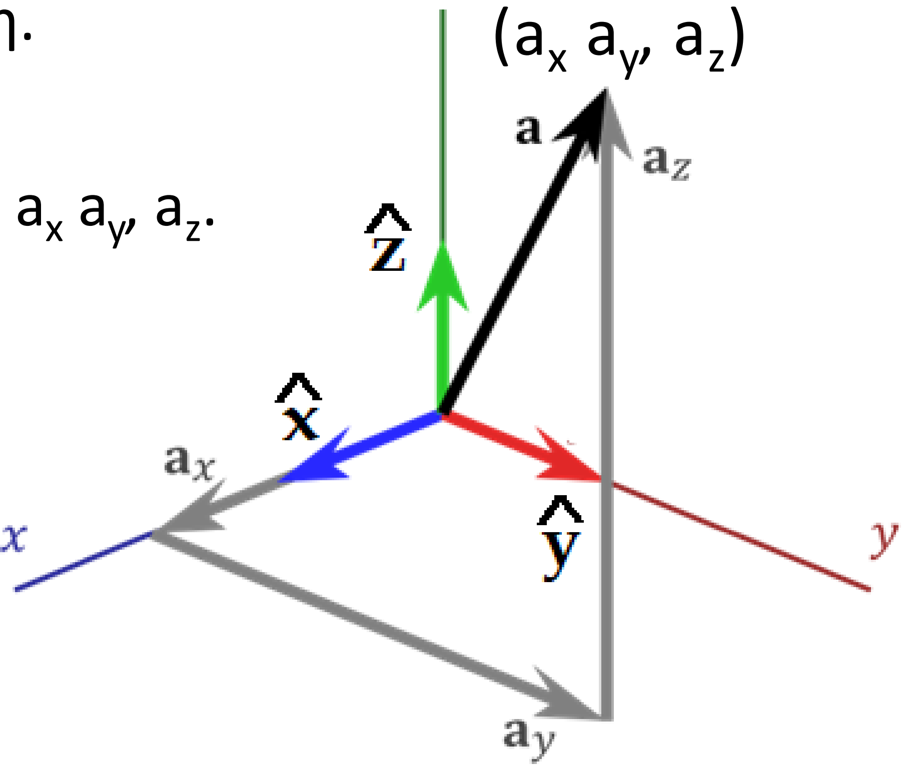



Το διάνυσμα χαρακτηρίζεται από τις συντεταγμένες του $a_x$ $a_y$, $a_z$.

$$\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{a} = a_x\hat{x}+a_y\,\hat{y}+a_z\hat{z}$$

$\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ τα μοναδιαία διανύσματα που είναι παράλληλα στους άξονες x, y, z



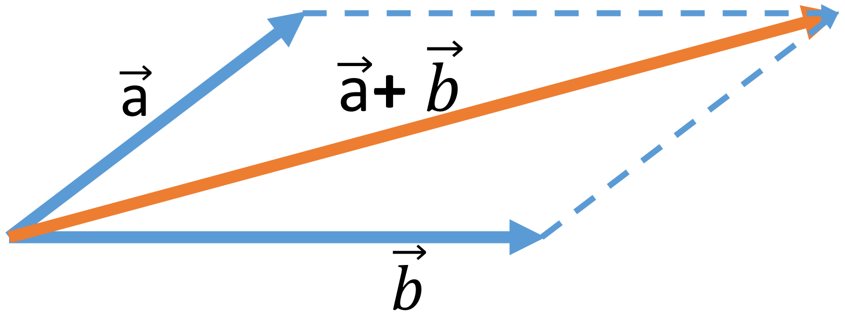
# Πράξεις με διανύσματα

‘Εστω δυο διανύσματα $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ ή $\vec{a}=a_x\hat{x}+a_y\hat{y}+a_z\hat{z}$ και

$\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$ ή $\vec{b}=b_x\hat{x}+b_y\hat{y}+b_z\hat{z}$

- Ορίζουμε ως πρόσθεση 2 διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ την πράξη:

$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$




- Ορίζουμε ως πολλαπλασιασμό μιας σταθεράς λ με διάνυσμα $\vec{a}$ ως εξής:

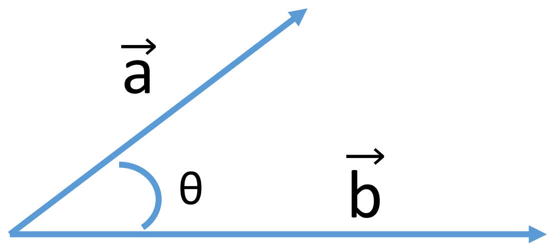
$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$

# Εσωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων

Εστω δυο διανύσματα $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ή $\vec{a} = a_x\hat{\mathbf{x}} + a_y\hat{\mathbf{y}} + a_z\hat{\mathbf{z}}$ και

$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ή $\vec{b} = b_x\hat{\mathbf{x}} + b_y\hat{\mathbf{y}} + b_z\hat{\mathbf{z}}$

Ορίζω το εσωτερικό γινόμενο με 2 τρόπους:




1ος τρόπος: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

2ος τρόπος: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta$

Όπου $|\vec{a}||\vec{b}|$ είναι τα μέτρα των δυο διανυσμάτων και θ είναι μεταξύ τους γωνία.

**Προσοχή!** **Το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων είναι ένα βαθμωτό μέγεθος δηλαδή ένα απλός αριθμός. Δεν είναι διάνυσμα!**

# Εξωτερικό γινόμενο

Για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ όπου

$\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ ή $\vec{a}=a_x\hat{\mathbf{x}}+a_y\hat{\mathbf{y}}+a_z\hat{\mathbf{z}}$

και

$\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$ ή $\vec{b}=b_x\hat{\mathbf{x}}+b_y\hat{\mathbf{y}}+b_z\hat{\mathbf{z}}$

ορίζω το εξωτερικό γινόμενο με 2 τρόπους.

1ος τρόπος

Ως την ορίζουσα: $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\hat{\mathbf{x}}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\hat{\mathbf{y}}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\hat{\mathbf{z}}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=(a_yb_z-b_ya_z)\hat{\mathbf{x}}-(a_xb_z-b_xa_z)\hat{\mathbf{y}}+(a_xb_y-b_xa_y)\hat{\mathbf{z}}$$

# Εξωτερικό γινόμενο

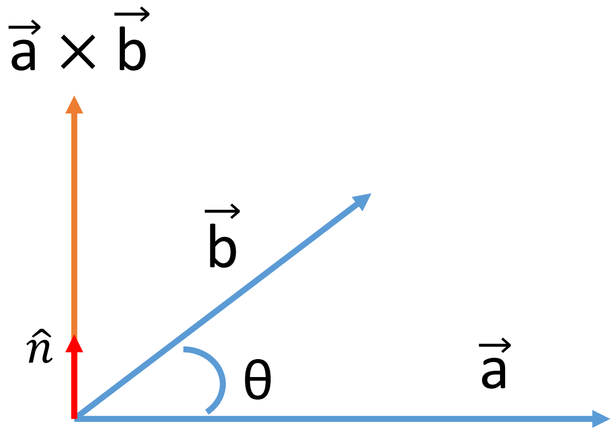
<u>2<sup></sup></u>

2$^{ος}$ τρόπος:

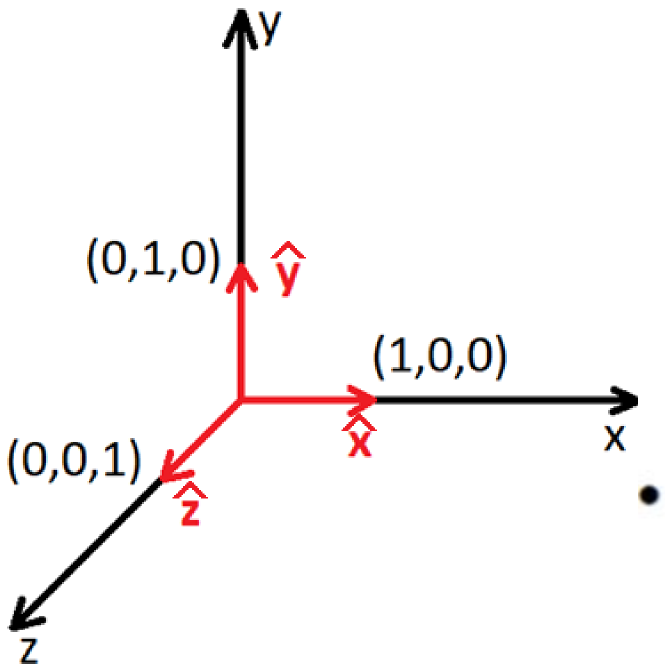
Το **εξωτερικό γινόμενο** δυο διανυσμάτων **a**, **b** ορίζεται ως:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{n}|\vec{a}||\vec{b}|sin\theta$$

Όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$, $\hat{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των $\vec{a}$,και $\vec{b}$, και φορά τέτοια ώστε η διατεταγμένη τριάδα ($\vec{a}$ ,$\vec{b}$, $\hat{n}$) να είναι θετικά προσανατολισμένη (κανόνας του δεξιόστροφου κοχλία).




**Προσοχή! Το εξωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων είναι ένα διανυσματικό μέγεθος.**




# Μέτρο και Μοναδιαία Διανύσματα

$$\hat{\mathbf{x}} = (1,0,0)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = (0,1,0)$$

$$\hat{\mathbf{z}} = (0,0,1)$$

- Τα παραπάνω διανύσματα είναι μοναδιαία επειδή έχουν μέτρο ίσο με την μονάδα. Το μέτρο ενός διανύσματος ορίζεται ως

$$|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}}}$$

- Κάθε διάνυσμα **a** μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\vec{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{x}} + a_y\hat{\mathbf{y}} + a_z\hat{\mathbf{z}}$$

# Ιδιότητες Γινομένων

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{a}}$$

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=-\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{a}}$$

$$\left(\vec{\mathbf{a}}+\mathbf{b}\right)\cdot\vec{\mathbf{c}}=\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}}$$

$$\left(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}\right)\times\vec{\mathbf{c}}=\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}$$

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})=\vec{\mathbf{b}}\cdot(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{a}})=\vec{\mathbf{c}}\cdot(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})$$

$$\vec{\mathbf{a}}\times(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})=(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}}-(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}}$$

$$(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\cdot(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{d}})=(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{d}})-(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}})(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{d}})$$

# Μερικές ιδιότητες

- Δύο διανύσματα $\vec{\mathbf{a}}$ και $\vec{\mathbf{b}}$ είναι κάθετα αν και μόνο εάν:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$$

- Δύο διανύσματα **a** και **b** είναι παράλληλα αν και μόνο εάν υπάρχει μία σταθερά λ τέτοια ώστε:

$$\vec{\mathbf{b}} = \lambda \vec{\mathbf{a}}$$

- Για τα μοναδιαία διανύσματα που ορίσαμε πρίν:

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$$

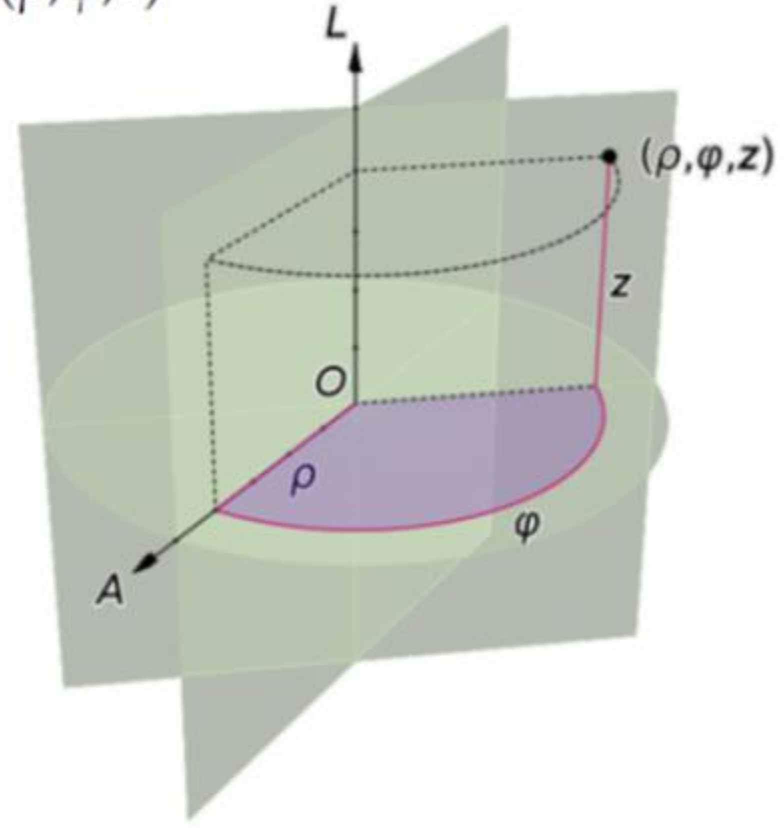
## Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

- Στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, κάθε σημείο $(x,y,z)$ στο χώρο καθορίζεται από τρεις αριθμούς $(\rho,\phi,z)$

$$x = \rho\cos\phi$$

$$y = \rho\sin\phi$$

$$z = z$$




- Όσο αφορά τα διανύσματα μπορούνε να αναπαρασταθούν στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων ως εξής:

$$\vec{\mathbf{a}} = a_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + a_\phi\hat{\boldsymbol{\varphi}} + a_z\hat{\mathbf{z}}$$

- Τα διανύσματα **ρ**,**φ** και **z** είναι μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους. Δίνονται από τις σχέσεις:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}$$

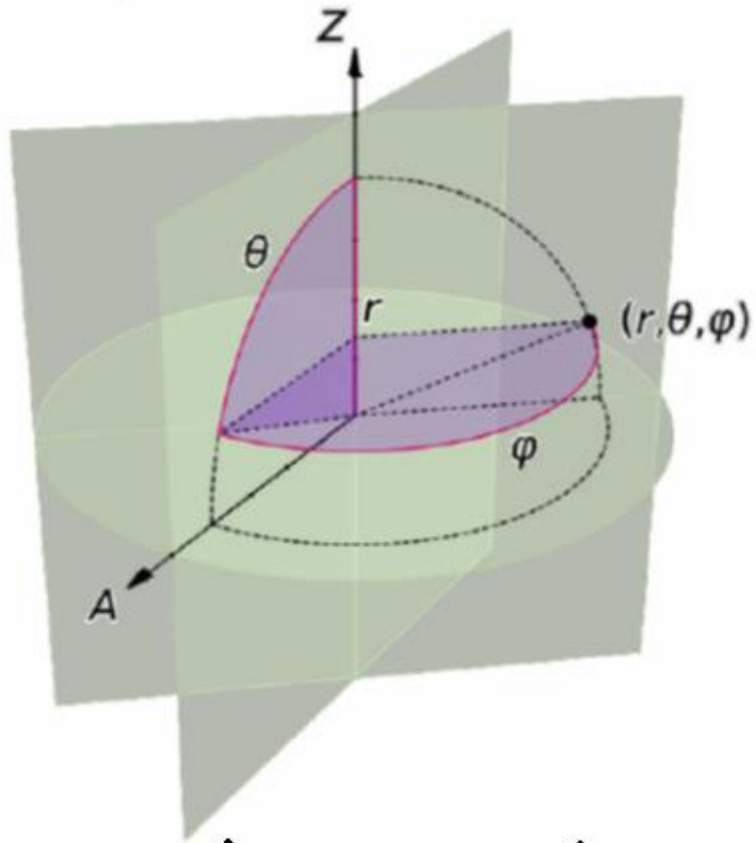
**Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων**

- Στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, κάθε σημείο $(x,y,z)$ στο χώρο καθορίζεται από τρεις αριθμούς $(r,\theta,\phi)$

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$




- Όσο αφορά τα διανύσματα μπορούνε να αναπαρασταθούν στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων ως εξής:

$$\vec{\mathbf{a}} = a_\rho\hat{\mathbf{r}} + a_\phi\hat{\boldsymbol{\varphi}} + a_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

- Τα διανύσματα $\mathbf{r}$,$\boldsymbol{\theta}$ και $\boldsymbol{\phi}$ είναι μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους. Δίνονται από τις σχέσεις:

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\hat{\mathbf{y}}$$

**Μερικές Παράγωγοι**

- Οι μερικές παράγωγοι χρησιμοποιούνται όταν έχουμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Για μία συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x,y)$, ο «επίσημος τρόπος» να ορίσουμε τις παραγώγους είναι ο εξής:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

- Στην πράξη, μπορούμε να υπολογίζουμε την μερική παράγωγο μίας συνάρτησης ως προς μία μεταβλητή χρησιμοποιώντας όλα όσα ξέρουμε για τις συνήθεις παραγώγους, αντιμετωπίζοντας όλες τις άλλες μεταβλητές ως σταθερές.

# Μερικά παραδείγματα

**Μερικές Παράγωγοι**

- αν $f(x,y)=x^2+y^2$, τότε θα έχουμε $\partial f/\partial x=2x$ αφού όπως είπαμε θα θεωρούμε πως η $y$ είναι σταθερά οπότε $\partial(y^2)/\partial x=0$.
- Παρόμοια θα έχουμε $\partial f/\partial y=2y$.
- Στην περίπτωση όπου $f(x,y)=x^3+y^3$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=0$$

Τελεστές

- Οι τελεστές είναι μετασχηματισμοί που μας μεταφέρουν από μία συνάρτηση σε μία άλλη.
- Για παράδειγμα ο τελεστής της παραγώγισης d/dx μετασχηματίζει μία συνάρτηση *f* στην παράγωγο της d*f*/d*x*
- Μπορούμε να ορίσουμε τελεστές οι οποίοι μετασχηματίζουν μία διανυσματική ή βαθμωτή συνάρτηση σε μία άλλη διανυσματική ή βαθμωτή συνάρτηση.
- Ο πρώτος τελεστής που θα γνωρίσουμε είναι η κλίση μίας βαθμωτής συνάρτησης,

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

- Το σύμβολο ∇ ονομάζεται «ανάδελτα»

- Το ανάδελτα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τελεστής-διάνυσμα με «συντεταγμένες», $\nabla=(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$
- Μπορούμε επομένως να ορίσουμε διάφορες δράσεις του τελεστή σκεπτόμενοι τις ιδιότητες των διανυσμάτων.
- Για παράδειγμα όταν πολλαπλασιάζουμε ένα διάνυσμα με ένα αριθμό έχουμε:

$$\lambda\vec{\mathbf{a}} = \left(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\right)$$

**Τελεστές**

- Με τον ίδιο τρόπο:

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

- Παρατηρείστε πως η f στην ουσία έχει μεταφερθεί σε κάθε συνιστώσα του $\nabla=(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ όπως περίπου και στην περίπτωση ενός πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό!

Τελεστές

- Η απόκλιση (εσωτερικό γινόμενο του $\nabla$ με διανυσματική συνάρτηση)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Το curl (εξωτερικό γινόμενο του $\nabla$ με διανυσματική συνάρτηση)

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_y b_z - b_y a_z)\mathbf{x} - (a_x b_z - b_x a_z)\mathbf{y} + (a_x b_y - b_x a_y)\mathbf{z}$$

Λαπλασιανή Διανυσματικής Συναρτήσεως **A**

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

**Τελεστές**

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} = \nabla^2 A_x \hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y \hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z \hat{\mathbf{z}}$$

Οι βασικοί νόμοι του ηλεκτρομαγνητισμού που θα χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε την διάδοση των σημάτων εκφράζονται πολύ πιο εύκολα βάση των τριών τελεστών που ορίσαμε, δηλαδή $\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{A}}$ και $\nabla f$

# ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Η ολοκλήρωση είναι η αντίστροφη πράξη
της παραγώγισης

Δηλαδή αν ισχύει $\frac{dF}{dx} = f(x)$

Θα έχουμε $\int f(x)dx = F(x) + C$ Όπου $C$ σταθερά.

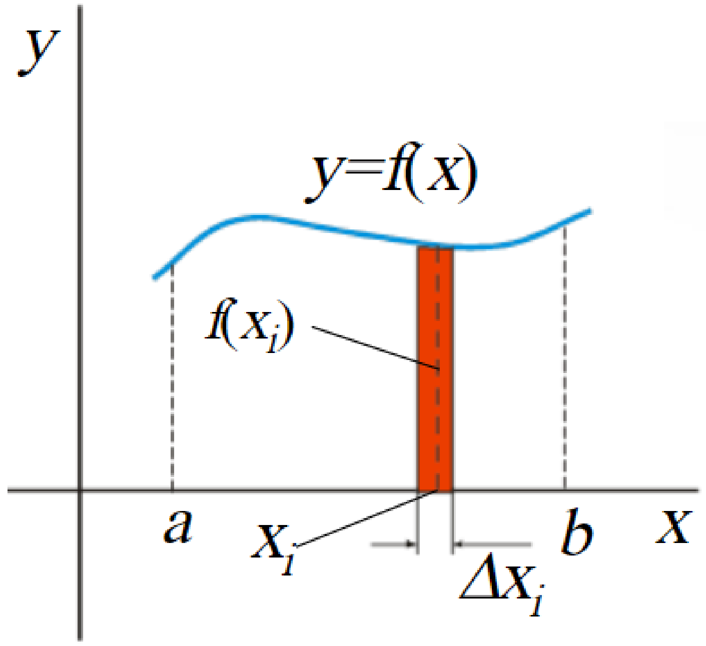
Στη Φυσική η σταθερά $C$ υπολογίζεται από κάποιες συνθήκες (αρχικές ή ενδιάμεσες) του προβλήματος.

Για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε κάποια μέθοδο ολοκλήρωσης

**Το αόριστο ολοκλήρωμα είναι ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ**

# ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Έστω συνάρτηση $y=f(x)$ με πεδίο ορισμού $a \le x \le b$.
Χωρίζουμε το πεδίο ορισμού σε πολλά μικρά τμήματα $\Delta x_i$ το κέντρο των οποίων είναι το $x_i$.
Εάν από το $x_i$ και με βάση το $\Delta x_i$ φέρουμε ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με ύψος το $f(x_i)$ θα έχουμε:

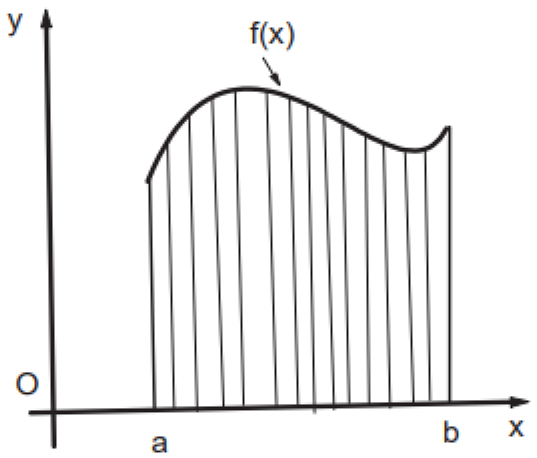


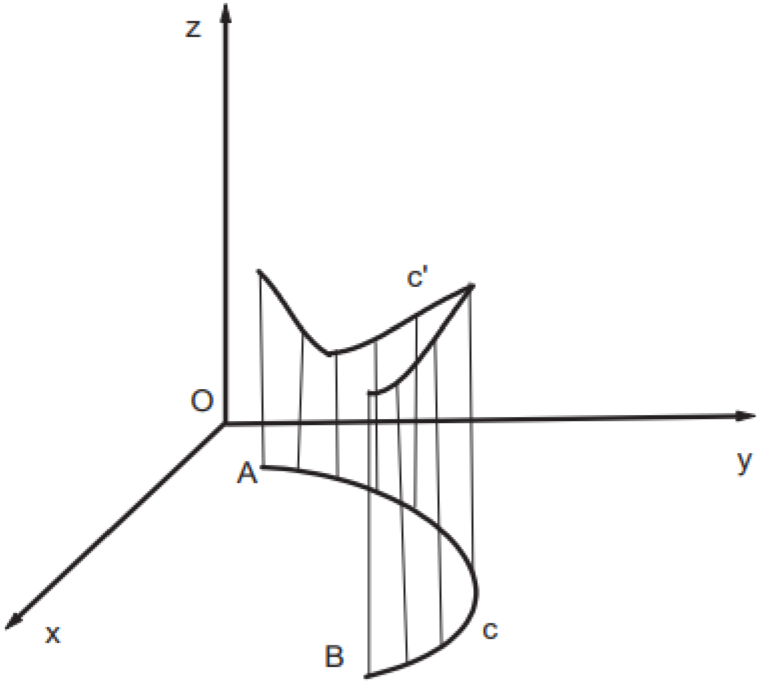

$$S' = \sum_{i=1}^{N} (f(x_i)\Delta x_i) = \int_a^b f(x)dx$$

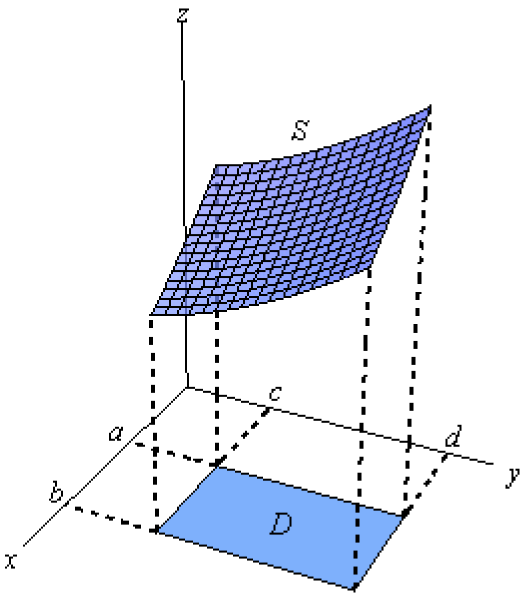
Όπου $N$ το πλήθος των $\Delta x_i$ στα οποία χωρίσαμε το διάστημα $ab$ και $S'$ εμβαδόν που διαφέρει λίγο από το εμβαδόν της περιοχής που περιέχεται μεταξύ της $f(x)$ και του άξονα $x$.

**Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι αριθμός**

**Επικαμπύλια και επιεπιφάνεια ολοκληρώματα**




$$\int_C f(\mathbf{r})\, ds \qquad \iint_S f\, \mathrm{d}S$$

Όταν έχω επικαμπύλια και επιεπιφάνεια ολοκληρώματα τα μετατρέπω σε απλά ορισμένα ολοκληρώματα για να τα επιλύσω.