

## ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

### Ασκήσεις

1. Με χρήση της Αρχής της Επαγωγής αποδείξτε ότι:

$$P(n): 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \geq 1$$

### Λύση

Βάση της επαγωγής: Για  $n = 1$  ισχύει ότι

$$1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 \quad (I)$$

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για  $n = k$  ισχύει ότι

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (II)$$

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι για  $n = k + 1$  ισχύει ότι

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Δηλαδή ότι

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \quad (III)$$

Απόδειξη: Για το αριστερό μέλος της προηγούμενης σχέσης (III) με αντικατάσταση από τη σχέση (II) ισχύει ότι

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \end{aligned}$$

Το τριώνυμο  $2k^2 + 7k + 6$  έχει διακρίνουσα  $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 49 - 48 = 1$

και οι ρίζες του είναι  $k_1 = -1.5$  και  $k_2 = -2$

Κατά συνέπεια το τριώνυμο παραγοντοποιείται σε  $2(k+1.5)(k+2) = (2k+3)(k+2)$

Άρα τελικά με αντικατάσταση προκύπτει η σχέση (III)

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}$$

2. Με χρήση της Αρχής της Επαγωγής αποδείξτε ότι:

$$P(n): n^3 < 2^n, \quad n \geq 10$$

**Λύση**

Βάση της επαγωγής: Για  $n = 10$  ισχύει ότι

$$10^3 < 2^{10} \quad (\text{I})$$

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για  $n = k$  ισχύει ότι

$$k^3 < 2^k \quad (\text{II})$$

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι για  $n = k + 1$  ισχύει ότι

$$(k + 1)^3 < 2^{(k+1)} \quad (\text{III})$$

Απόδειξη: Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της σχέσης (II) με 2 έχουμε

$$2k^3 < 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Κατά συνέπεια αρκεί να δείξουμε ότι

$$(k + 1)^3 < 2k^3$$

Δεδομένου ότι τα δύο μέλη της προηγούμενης σχέσης είναι θετικές ποσότητες αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sqrt[3]{(k + 1)^3} < \sqrt[3]{2k^3}$$

ή ακόμη ότι

$$k + 1 < k\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow \frac{k+1}{k} < \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{k} < \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{k} < 1.25$$

το οποίο ισχύει αφού  $k > 10$  και άρα  $1 + \frac{1}{k} = 1 + \frac{10}{100} < 1 + \frac{25}{100}$

3. Με χρήση της Αρχής της Επαγωγής αποδείξτε ότι:

$$P(n): 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}, \quad n \geq 1$$

4. Με χρήση της Αρχής της Επαγωγής αποδείξτε ότι:

$$P(n): n^2 < 2^n, \quad n \geq 4$$

5. Αν  $a \in \mathbb{R}$ , είναι κάποιος πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε  $a \geq -1$  τότε με χρήση της Αρχής της Επαγωγής αποδείξτε ότι για  $n \geq 1$  ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

$$P(n): (1 + a)^n \geq 1 + na$$

## ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ - ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ

### Ασκήσεις

1. Σε μια έρευνα γνώσης ξένων γλωσσών για 18 απόφοιτους καταγράφηκαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

- 10 έχουν κάποιο πτυχίο αγγλικών
- 10 έχουν κάποιο πτυχίο γαλλικών
- 7 έχουν κάποιο πτυχίο γερμανικών
- 3 έχουν πτυχίο γερμανικών και αγγλικών
- 4 έχουν πτυχίο γερμανικών και γαλλικών
- 5 έχουν πτυχίο αγγλικών και γαλλικών
- 1 έχει πτυχίο και στις τρεις γλώσσες

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- (a) Υπάρχουν απόφοιτοι που δεν έχουν πτυχίο σε καμία από τις τρεις γλώσσες και αν ναι πόσοι.
- (b) Πόσοι φοιτητές έχουν πτυχίο σε μία μόνο γλώσσα, δηλ. μόνο στα αγγλικά ή μόνο στα γαλλικά ή μόνο στα γερμανικά.

2. Σε εσωτερική έρευνα μιάς επιχείρησης βρέθηκε ότι τα 12 ανώτερα στελέχη της, κάθε πρωί, πριν αρχίσουν την εργασία τους, επισκέπτονται για ενημέρωση ένα, ή και τα δύο, από τα πιο σημαντικά ειδησεογραφικά sites, A και B. Δεδομένου ότι 3 στελέχη επισκέπτονται το site A και 6 στελέχη επισκέπτονται και τα δύο sites (A και B) υπολογίστε τον αριθμό  $k$  των στελεχών που επισκέπτονται μόνο το site B.

3. Σε μία έρευνα ερωτήθηκαν 15 οικογένειες αν έχουν κατοικίδιο σκύλο ή γάτα και απάντησαν ως εξής: 9 οικογένειες έχουν σκύλο, 6 οικογένειες έχουν γάτα ενώ 3 οικογένειες δεν έχουν ούτε σκύλο ούτε γάτα. Να υπολογίσετε το πλήθος  $k$  των οικογενειών που έχουν και σκύλο και γάτα.

4. Σε μια Εξεταστική περίοδο οι 150 φοιτητές του Α' Εξαμήνου ενός Τμήματος Πληροφορικής είχαν τα ακόλουθα αποτελέσματα επιτυχίας: στα Μαθηματικά πέτυχαν 80, στον Προγραμματισμό πέτυχαν 50 ενώ στη Λογική Σχεδίαση πέτυχαν 95. Από τους φοιτητές που πέτυχαν στα Μαθηματικά οι 30 πέτυχαν και στον Προγραμματισμό ενώ οι 40 πέτυχαν και στη Λογική Σχεδίαση. Ακόμη, από τους φοιτητές που πέτυχαν στη Λογική Σχεδίαση μόνο 10 πέτυχαν και στον Προγραμματισμό. Απαντήστε σχετικά με το πόσοι φοιτητές πέτυχαν:

- (a) και στα τρία μαθήματα,
- (b) σε κάθε μάθημα χωρίς να έχουν επιτύχει σε κάποιο άλλο.