

ΑΡΧΕΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Ανάκλαση επίπεδων κυμάτων

Εξισώσεις Maxwell

Οι εξισώσεις Maxwell στην τυπική τους μορφή όπου τα διανύσματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε μορφή.

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_o} \iiint_V \rho dV$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \iint_S \left(\vec{J} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Φασιθέτες (Phasors)

Έστω ότι το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος μπορεί να αναπαρασταθεί ως:

$$\vec{E} = \vec{E}_o \cos(kx - \omega t)$$

Για να αναπαραστήσουμε αυτό το κύμα ως φάση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μιγαδική εκθετική μορφή:

$$\dot{\vec{E}} = \vec{E}_o e^{j(kx - \omega t)} = \vec{E}_o e^{j\phi} \quad \text{όπου } j \text{ είναι η φανταστική μονάδα.}$$

Το E_o , αντιπροσωπεύει το πλάτος του κύματος και το ϕ αντιπροσωπεύει τη φάση του κύματος. Η συχνότητα του κύματος σχετίζεται με το ρυθμό μεταβολής της γωνίας φάσης με την πάροδο του χρόνου.

Η χρήση φασόρων για την αναπαράσταση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μας επιτρέπει να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς που αφορούν τα κύματα, όπως τον υπολογισμό της παρεμβολής μεταξύ δύο κυμάτων ή την απόκριση ενός κυκλώματος σε ένα σήμα εισόδου AC.

Εξισώσεις Maxwell με φασιθέτες

Οι εξισώσεις Maxwell όπου τα διανύσματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου γράφονται με τη μορφή φασιθέτη.

κλασική

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$



με φασιθέτες

$$\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{D}} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \dot{\vec{E}} = -i\omega \dot{\vec{B}}$$

$$\vec{\nabla} \times \dot{\vec{H}} = \vec{J} + i\omega \dot{\vec{D}}$$

Αυτό το σύμβολο
με την τελεία από
πάνω αντιστοιχεί
στον φασιθέτη

Πλάγια διάδοση

Αντί για τις συντεταγμένες xyz μας εξυπηρετεί να θεωρήσουμε τα διανυσματικά μας μεγέθη ως προς τον κυματαριθμό τον οποίο γράφουμε:

$$\vec{k} = k\hat{n}$$

άρα η διεύθυνση διάδοσης είναι κατά το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ και τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{H}$ ($\vec{H} = \vec{B} / \mu_0$) δίνονται από:

$$\dot{\vec{E}} = \vec{E}_o e^{-j\vec{k}\vec{r}} = \vec{E}_o e^{-jkr\hat{n}}$$

$$\dot{\vec{H}} = \vec{H}_o e^{-j\vec{k}\vec{r}} = \vec{H}_o e^{-jkr\hat{n}} = \frac{\hat{n} \times \dot{\vec{E}}}{\eta'} = \frac{\hat{n} \times \vec{E}_o e^{-jkr\hat{n}}}{\eta'}$$

$$\text{Όπου } \eta' = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

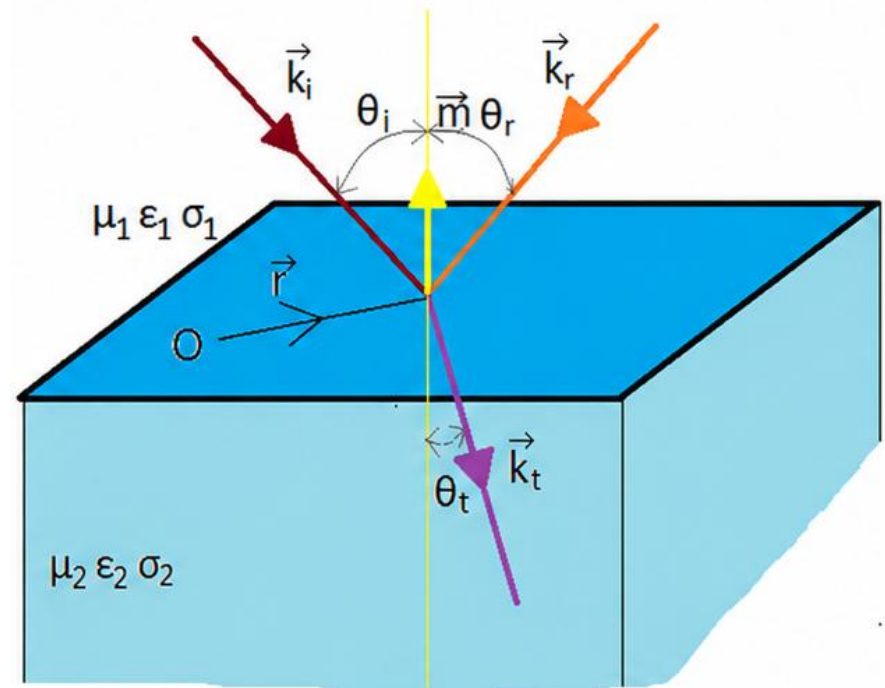
Η σύνθετη
αντίσταση του
μέσου

Οι νόμοι της ανάκλασης και διάθλασης

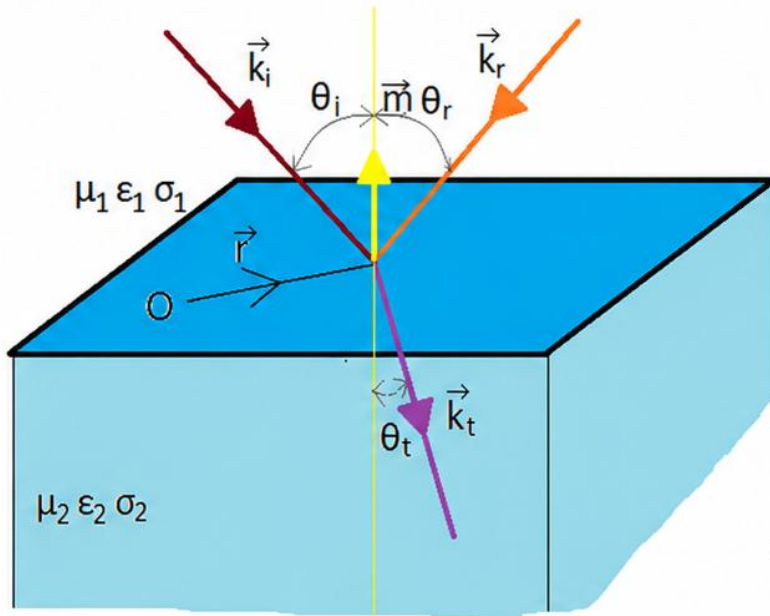
- Ομοιόμορφο κύμα που διαδίδεται σε μέσο (1) και προσπίπτει σε διαχωριστική επιφάνεια θα ανακλαστεί εν μέρει και εν μέρει θα διαδοθεί σε μέσο (2)
 - Οι χώροι (1), (2) έχουν ιδιότητες $\epsilon_{1,2}$, $\mu_{1,2}$, $\sigma_{1,2}$ αλλά για ευκολία εδώ θα θεωρήσουμε ότι $\sigma_{1,2}=0$
 - Για να λυθεί τέτοιο πρόβλημα μελετώνται οι οριακές συνθήκες στη διαχωριστική επιφάνεια.

Προκύπτουν κάποιοι «κανόνες» που περιγράφονται από τις σχετικές εξισώσεις και αντιπροσωπεύουν τους νόμους διάθλασης και ανάκλασης

Το διάνυσμα $\vec{m}$ είναι κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια



Τα διανύσματα k_i , k_r , k_t



i: incident

$$\mathbf{k}_i = k_i \hat{\mathbf{n}}_i = \omega_i \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \hat{\mathbf{n}}_i$$

r: reflected

$$\mathbf{k}_r = k_r \hat{\mathbf{n}}_r = \omega_r \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \hat{\mathbf{n}}_r$$

t: transmitted

$$\mathbf{k}_t = k_t \hat{\mathbf{n}}_t = \omega_t \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \hat{\mathbf{n}}_t$$

$$\dot{\mathbf{E}}_i = \mathbf{E}_{oi} e^{-jk_i r}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_r = \mathbf{E}_{or} e^{-jk_r r}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_t = \mathbf{E}_{ot} e^{-jk_t r}$$

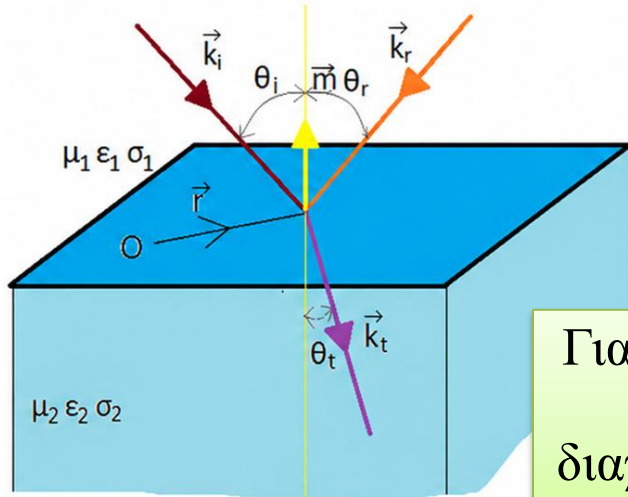
Ενώ για το μαγνητικό
($\sigma=0$)

$$\dot{\mathbf{H}}_i = \mathbf{H}_{oi} e^{-jk_i r} = \frac{\hat{\mathbf{n}}_i \times \dot{\mathbf{E}}_i}{\eta_1} = \frac{\mathbf{k}_i \times \dot{\mathbf{E}}_i}{\omega_i \mu_1}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_r = \mathbf{H}_{or} e^{-jk_r r} = \frac{\hat{\mathbf{n}}_r \times \dot{\mathbf{E}}_r}{\eta_1} = \frac{\mathbf{k}_r \times \dot{\mathbf{E}}_r}{\omega_r \mu_1}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_t = \mathbf{H}_{ot} e^{-jk_t r} = \frac{\hat{\mathbf{n}}_t \times \dot{\mathbf{E}}_t}{\eta_2} = \frac{\mathbf{k}_t \times \dot{\mathbf{E}}_t}{\omega_t \mu_2}$$

Αναλλοίωτο της συχνότητας του κύματος



i : incident r : reflected t : transmitted

$$\underline{\text{Av}} \quad \dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{\mathbf{E}}_i + \dot{\mathbf{E}}_r \quad \dot{\mathbf{E}}_2 = \dot{\mathbf{E}}_t$$

Σ είναι η
διαχωριστική
ή επιφάνεια
των 2 μέσων

Για να ισχύει η **Αρχή Διατήρησης της Ηλεκτρικής Ροής** στη διαχωριστική επιφάνεια θα έχουμε:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{E}}_2) \Big|_S = 0$$

δηλαδή: $\hat{\mathbf{n}} \times (\dot{\mathbf{E}}_i + \dot{\mathbf{E}}_r - \dot{\mathbf{E}}_t) \Big|_S = 0 \Rightarrow$

επομένως: $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_{oi} e^{-jk_i r} e^{j\omega_i t} + \mathbf{E}_{or} e^{-jk_r r} e^{j\omega_r t}) \Big|_S = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{ot} e^{-jk_t r} e^{j\omega_t t} \Big|_S \Rightarrow$

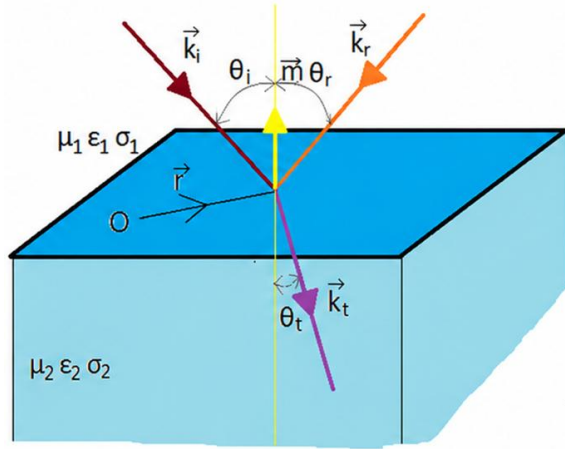
$$\left. \begin{aligned} A e^{j\omega_i t} + B e^{j\omega_r t} &= C e^{j\omega_t t} \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} \text{Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο} \\ \Rightarrow j\omega_i A e^{j\omega_i t} + j\omega_r B e^{j\omega_r t} &= j\omega_t C e^{j\omega_t t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A(\omega_i - \omega_t) e^{j\omega_i t} &= B(\omega_t - \omega_r) e^{j\omega_r t} \\ A(\omega_i - \omega_r) e^{j\omega_i t} &= C(\omega_t - \omega_r) e^{j\omega_t t} \end{aligned}$$

Άρα η συχνότητα όλων των κυμάτων παραμένει η ίδια με την αρχική

$$\Rightarrow e^{j\omega_i t} = e^{j\omega_r t} = e^{j\omega_t t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega}$$

Κοινά επίπεδα πρόσπτωσης, ανάκλασης και διάθλασης



i : incident r : reflected t : transmitted

$$\hat{n} \times (\dot{\mathbf{E}}_i + \dot{\mathbf{E}}_r - \dot{\mathbf{E}}_t) \Big|_S = 0$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_{oi} e^{-jk_i r} + \mathbf{E}_{or} e^{-jk_r r}) \Big|_S = \hat{n} \times \mathbf{E}_{ot} e^{-jk_t r} \Big|_S$$

Θεωρώντας ότι η αρχή των αξόνων (αρχή του $\mathbf{r}$) βρίσκεται πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια (χωρίς περιορισμό της γενικότητας):

$$\left. \begin{aligned} a e^{-jk_{is} \mathbf{r}} + b e^{-jk_{rs} \mathbf{r}} &= c e^{-jk_{ts} \mathbf{r}} \\ \nabla \Rightarrow -jk_{is} a e^{-jk_{is} \mathbf{r}} - jk_{rs} b e^{-jk_{rs} \mathbf{r}} &= -jk_{ts} c e^{-jk_{ts} \mathbf{r}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\begin{aligned} \mathbf{k}_i &= \mathbf{k}_{is} + k_{in} \hat{n} \\ \mathbf{k}_r &= \mathbf{k}_{rs} + k_{rn} \hat{n} \\ \mathbf{k}_t &= \mathbf{k}_{ts} + k_{tn} \hat{n} \end{aligned} \right)$$

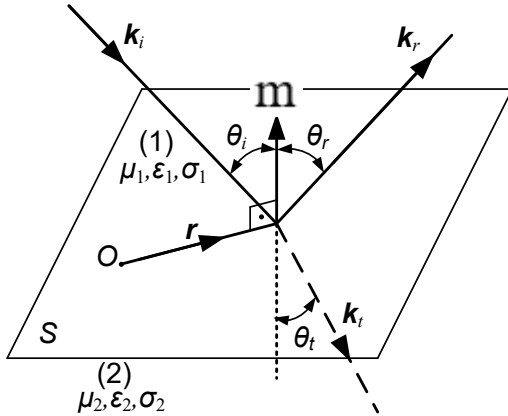
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(\mathbf{k}_{is} - \mathbf{k}_{ts}) e^{-jk_i r} = b(\mathbf{k}_{ts} - \mathbf{k}_{rs}) e^{-jk_r r} \\ \alpha(\mathbf{k}_{is} - \mathbf{k}_{rs}) e^{-jk_i r} = c(\mathbf{k}_{ts} - \mathbf{k}_{rs}) e^{-jk_t r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^{-jk_{is} r} = e^{-jk_{rs} r} = e^{-jk_{ts} r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{k}_i r = \mathbf{k}_r r = \mathbf{k}_t r}$$

Όλα τα κύματα παραμένουν στο ίδιο επίπεδο

Κοινά επίπεδα πρόσπτωσης, ανάκλασης και διάθλασης



i : incident r : reflected t : transmitted

Θεωρώντας ότι η αρχή των αξόνων (αρχή του r) βρίσκεται πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια (χωρίς βλάβη της γενικότητας):

Δηλαδή τα διανύσματα k_i, k_r, k_t είναι ομοεπίπεδα

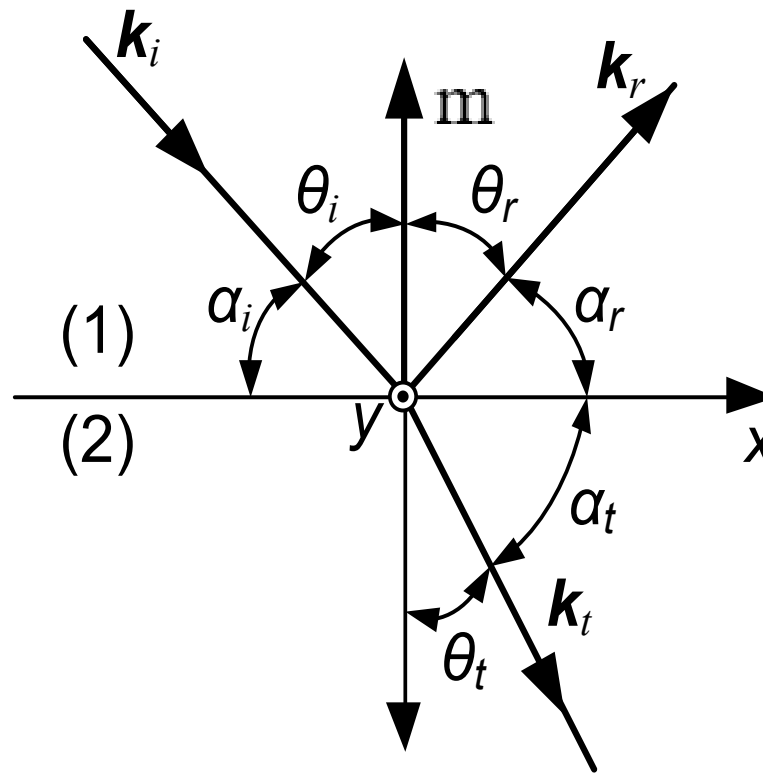
$$k_i r = k_r r = k_t r$$

(Αν $k_i r = 0$ αναγκαστικά $k_r r = k_t r = 0$ για παράδειγμα)

Επειδή επίσης θα είναι $\hat{m} \vec{r} = 0$ συμπεραίνεται ότι και το κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια διάνυσμα θα βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο $\hat{m}$

Το επίπεδο αυτό ορίζεται ως το επίπεδο πρόσπτωσης

Μελέτη πρόσπτωσης ανάκλασης διάθλασης

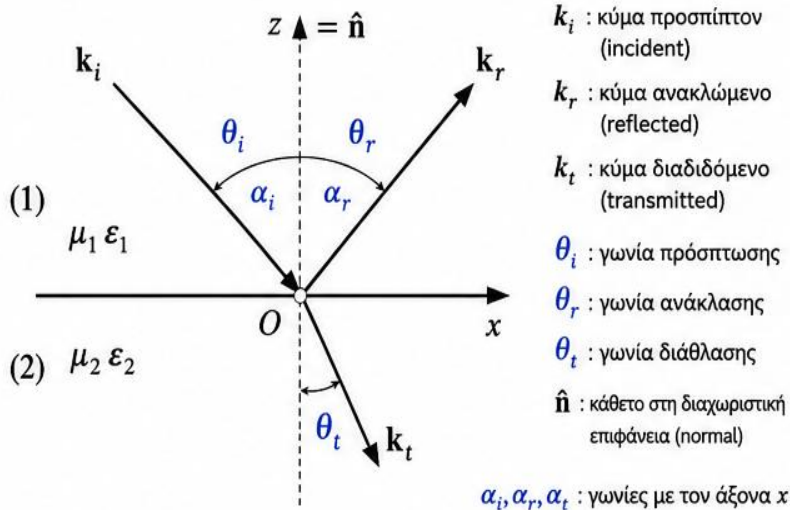


Έστω ότι το διάνυσμα r έχει φορέα τον άξονα x . Ο άξονας z επιλέγεται κάθετος στη διαχωριστική επιφάνεια. Ή διαφορετικά το κοινό επίπεδο πρόσπτωσης, ανάκλασης και διάθλασης είναι το επίπεδο $y=0$

Νόμος Snell

Ο νόμος του Snell περιγράφει τη σχέση μεταξύ των γωνιών πρόσπτωσης, ανάκλασης και διάθλασης όταν ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα προσπίπτει σε διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων.

1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ



2. ΠΡΟΒΟΛΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ x

Η φάση των κυμάτων πρέπει να είναι συνεχής παράλληλα στη διαχωριστική επιφάνεια. Άρα οι προβολές των διανυσμάτων κύματος στον άξονα x είναι ίσες.

$$k_i \cos \alpha_i = k_r \cos \alpha_r = k_t \cos \alpha_t \quad \Rightarrow \quad \text{οι προβολές στον x είναι ίσες}$$

Επειδή $k = \frac{\omega}{v}$ (ω : γωνιακή συχνότητα, v : φασική ταχύτητα)

$$\frac{\omega}{v_1} r \cos \alpha_i = \frac{\omega}{v_1} r \cos \alpha_r = \frac{\omega}{v_2} r \cos \alpha_t \quad \Rightarrow \quad (\text{αφαιρούμε τα κοινά } \omega, r)$$

$$\cos \alpha_i = \cos \alpha_r, \quad \frac{\cos \alpha_i}{v_1} = \frac{\cos \alpha_t}{v_2}$$

Από τη γεωμετρία: $n = \sqrt{\mu \epsilon}$ και $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \Rightarrow \frac{1}{v} = \sqrt{\mu \epsilon}$

ΦΥΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

Η φάση του κύματος πρέπει να «ταιριάζει» κατά μήκος της επιφάνειας για κάθε χρονική στιγμή t . Αυτό οδηγεί στην ισότητα των προβολών των διανυσμάτων κύματος στον άξονα x.

3. ΑΝΑΚΛΑΣΗ

Επειδή το μέσο (1) είναι το ίδιο και στις δύο πλευρές της κάθετης, η προβολή των k_i και k_r στον x είναι ίση.

Άρα:

$$\theta_i = \theta_r$$

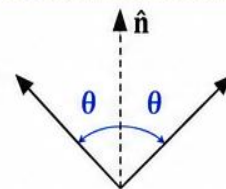
4. ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΜΕ ΤΙΣ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ

Από τη γεωμετρία:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Οι γωνίες θ μετρούνται από την κάθετη (normal) προς την επιφάνεια.



5. ΔΕΙΚΤΕΣ ΔΙΑΘΛΑΣΗΣ

Μέσο (1)

$$n_1 = \frac{c}{v_1} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}$$

Μέσο (2)

$$n_2 = \frac{c}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\mu_{r2} \epsilon_{r2}}$$

6. ΝΟΜΟΣ SNEEL

Από (4): $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2}$ και από (5): $\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$

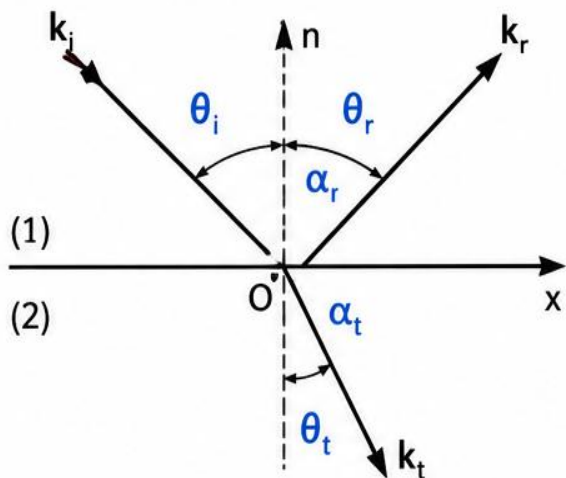
$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}} = n_{12}$$

Αυτός είναι ο Νόμος του Snell.

ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

- c : ταχύτητα του φωτός στο κενό ($\approx 3 \times 10^8$ m/s)
- μ, ϵ : μαγνητική διαπερατότητα και ηλεκτρική επιτρεπτότητα του μέσου
- μ_0, ϵ_0 : αντίστοιχες ποσότητες στο κενό
- $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}, \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$: σχετική διαπερατότητα και επιτρεπτότητα
- n : δείκτης διάθλασης του μέσου ($n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} = \frac{c}{v}$)
- $n_{12} = \frac{n_1}{n_2}$: σχετικός δείκτης διάθλασης από το μέσο (1) στο (2)

Κρίσιμη γωνία (από νόμο Snell)



1. Περίπτωση: $n_1 < n_2$

Από τον νόμο Snell: $\sin \theta_t = \sin \theta_i \frac{n_1}{n_2} \leq \sin \theta_i \leq 1$

Επειδή: $0 \leq \theta_t \leq \frac{\pi}{2}$

Συνεπώς: $\theta_t < \theta_i$

- Το κύμα διαδίδεται και στα δύο μέσα.
- Η διαθλώμενη γωνία είναι μικρότερη από την προσπίπτουσα.

2. Περίπτωση: $n_1 > n_2$

Από τον νόμο Snell:

$$\sin \theta_t = \sin \theta_i \frac{n_1}{n_2} > \sin \theta_i \leq 1$$

Συνεπώς: $\theta_t > \theta_i$

- Καθώς αυξάνουμε το θ_i , το θ_t αυξάνεται.
- Όταν $\sin \theta_t$ φτάσει το 1, τότε $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ (το διαθλώμενο κύμα «γλιστρά» κατά μήκος της επιφάνειας).
- Για μεγαλύτερα θ_i δεν υπάρχει διαθλώμενο κύμα: έχουμε **πλήρη ανάκλαση**.

3. Ορισμός κρίσιμης γωνίας

Προφανώς για να παίρνει πραγματικές τιμές η γωνία θ_t (όταν $n_1 > n_2$) πρέπει:

$$\sin \theta_i \leq \frac{n_2}{n_1}$$



Η γωνία $\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$ ονομάζεται κρίσιμη γωνία

Για ($n_1 > n_2$) θα είναι (από νόμο Snell)

$$\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c}$$

4. Πλήρης ανάκλαση

Επίσης όταν $\theta_i \geq \theta_c$ έχουμε πλήρη ανάκλαση (δηλαδή δεν υπάρχει διαθλώμενο κύμα στο μέσο 2).

Ερωτήσεις

1. Ποιο μέγεθος θεωρούμε ότι διατηρείται για να υπολογίσουμε τη συχνότητα του ανακλώμενου και διαθλώμενου κύματος;
2. Πώς μεταβάλλεται η συχνότητα του ανακλώμενου και διαθλώμενου κύματος ως προς το προσπίπτον;
3. Πώς μεταβάλλεται το επίπεδο του ανακλώμενου και διαθλώμενου κύματος ως προς το προσπίπτον;