ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

1. Σύνολα και Πράξεις Συνόλων

1.1. Στοιχειώδεις έννοιες, ορισμοί και ιδιότητες

Ορισμός: Ένα σύνολο $\boldsymbol{A}$ είναι μια συλλογή αντικειμένων που έχουν ένα ή περισσότερα κοινά χαρακτηριστικά ή ικανοποιούν μία ή περισσότερες ιδιότητες. Τα αντικείμενα ονομάζονται στοιχεία του συνόλου και κάθε στοιχείο εμφανίζεται στο σύνολο μία μόνο φορά.

Παράδειγμα: Το σύνολο των περιττών φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι από το 15 είναι δυνατόν να περιγραφεί με έναν από τους δύο τρόπους:

$$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{5}, \boldsymbol{7}, \boldsymbol{9}, \boldsymbol{11}, \boldsymbol{13}\}$$
$$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N} : \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{2} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{x} < 15\}$$

Ένα αντικείμενο $\boldsymbol{x}$ που είναι στοιχείο ενός συνόλου $\boldsymbol{A}$ λέγεται ότι ανήκει στο $\boldsymbol{A}$ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ ενώ αν δεν είναι στοιχείο του με $\boldsymbol{A}$ και γράφεται $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}$.

Ένα σύνολο χωρίς στοιχεία ονομάζεται κενό σύνολο και συμβολίζεται: $\{\ \}$ ή $\emptyset$

Προσοχή: *το σύνολο $\boldsymbol{B} = \{\emptyset\}$ δεν είναι κενό για τον ίδιο λόγο που ένας σάκκος που περιέχει έναν άδειο σάκκο δεν είναι άδειος.*

1.2. Σχέσεις μεταξύ συνόλων

Ορισμοί

- Δύο σύνολα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ λέγονται ίσα $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.
- Ένα σύνολο $\boldsymbol{B}$ λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου $\boldsymbol{A}$, και γράφεται $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$, όταν όλα τα στοιχεία του $\boldsymbol{B}$ περιέχονται στο $\boldsymbol{A}$. Στην περίπτωση που το $\boldsymbol{A}$ περιέχει και άλλα στοιχεία εκτός των στοιχείων του $\boldsymbol{B}$ τότε το $\boldsymbol{B}$ ονομάζεται γνήσιο υποσύνολο του $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$. Αντίστροφα το $\boldsymbol{A}$ ονομάζεται υπερσύνολο του $\boldsymbol{B}$ ή γνήσιο υπερσύνολο του $\boldsymbol{B}$.
- Για ένα πρόβλημα ή μια εφαρμογή ορίζεται ένα σύνολο $\boldsymbol{\Omega}$ ως το σύνολο που περιέχει όλα τα σύνολα που αναφέρονται στο πρόβλημα και ονομάζεται υπερσύνολο αναφοράς.

Ιδιότητες

- Για δύο σύνολα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$, αν $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ τότε ισχύει ότι $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$ και αντίστροφα.
- Για κάθε σύνολο $\boldsymbol{A}$ ισχύει ότι $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{A}$.
- Για οποιοδήποτε σύνολο $\boldsymbol{A}$ ισχύει ότι $\emptyset\subseteq\boldsymbol{A}$.
- Για οποιοδήποτε σύνολο $\boldsymbol{A}$ ισχύει ότι $\boldsymbol{A}\neq\{\boldsymbol{A}\}$.
- Το σύνολο $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\}$δεν έχει σχέση με κανένα από τα ακόλουθα σύνολα: $\left\{\{\boldsymbol{a}\},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right\}$, $\left\{\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right\}$, ή $\left\{\left\{\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}\right\},\boldsymbol{c},\{\boldsymbol{d}\}\right\}$ ή οποιοδήποτε άλλο σύνολο αυτού του «τύπου».

1.3. Πράξεις μεταξύ συνόλων

Ορισμοί

Αν $\boldsymbol{\Omega}$ είναι το υπερσύνολο αναφοράς και $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ δύο σύνολα υποσύνολα του $\boldsymbol{\Omega}$ τότε ορίζονται οι ακόλουθες πράξεις:

- **Ένωση**

Η ένωση του $\boldsymbol{A}$ με το $\boldsymbol{B}$ που συμβολίζεται με $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$ είναι ένα νέο σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του $\boldsymbol{A}$ και του $\boldsymbol{B}$. Η ένωση είναι μια πράξη η οποία εφαρμόζεται και σε περισσότερα από δύο σύνολα.

- **Τομή**

Η τομή του $\boldsymbol{A}$ με το $\boldsymbol{B}$ που συμβολίζεται με $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$ είναι ένα νέο σύνολο που περιέχει τα κοινά στοιχεία του $\boldsymbol{A}$ και του $\boldsymbol{B}$. Όπως και με την ένωση είναι δυνατόν να θεωρήσουμε την τομή περισσοτέρων δύο ή περισσοτέρων συνόλων.

- **Διαφορά**

Η διαφορά ενός συνόλου $\boldsymbol{B}$ από ένα σύνολο $\boldsymbol{A}$ που συμβολίζεται με $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ είναι το σύνολο των στοιχείων του $\boldsymbol{A}$ τα οποία δεν ανήκουν στο $\boldsymbol{B}$. Προφανώς, δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα και άρα $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$.

- **Συμμετρική διαφορά**

Η συμμετρική διαφορά δύο συνόλων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι το σύνολο που συμβολίζεται $\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B}$ και περιλαμβάνει τα στοιχεία του $\boldsymbol{A}$ που δεν ανήκουν στο $\boldsymbol{B}$ και τα στοιχεία του $\boldsymbol{B}$ που δεν ανήκουν στο $\boldsymbol{A}$. Δηλαδή, η συμμετρική διαφορά είναι η ένωση της διαφοράς του $\boldsymbol{B}$ από το $\boldsymbol{A}$ και της διαφοράς του $\boldsymbol{A}$ από το $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cup(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$.

- **Συμπλήρωμα**

Το συμπλήρωμα ενός συνόλου $\boldsymbol{A}$ ορίζεται πάντα σε σχέση με κάποιο υπερσύνολο του $\boldsymbol{A}$ και συμβολίζεται με $\overline{\boldsymbol{A}}$ ή $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{c}}$. Έτσι το συμπλήρωμα του $\boldsymbol{A}$ ως προς το υπερσύνολο αυτό είναι τα στοιχεία του υπερσυνόλου που δεν ανήκουν στο $\boldsymbol{A}$. Αν δεν αναφέρεται το υπερσύνολο τότε ως τέτοιο θεωρείται το υπερσύνολο αναφοράς $\boldsymbol{\Omega}$, άρα, $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{A}.$

Βασικές ιδιότητες των πράξεων

– $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})$

– $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})$

– $\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})$

– $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C})$

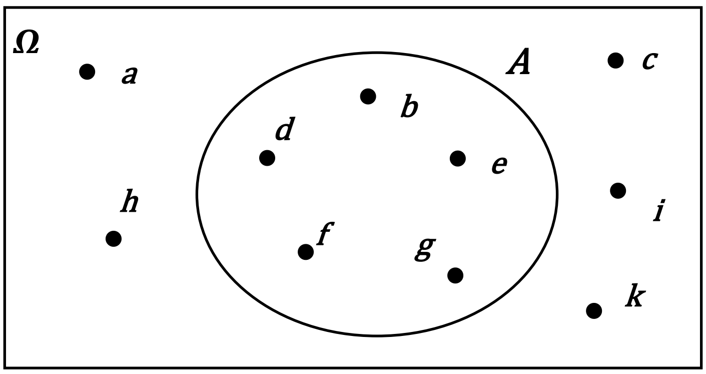
– $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C})$

– $\overline{(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$

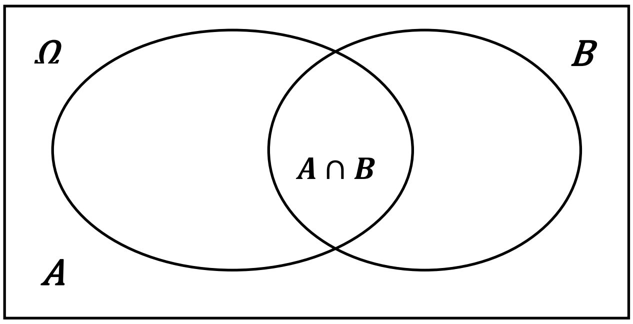
– $\overline{(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$

Διαγράμματα του Venn

Ένας τρόπος για την αναπαράσταση των συνόλων είναι με χρήση των διαγραμμάτων του Venn. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή ένα σύνολο αναπαρίσταται με μια κλειστή γραμμή που περικλείει όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο σύνολο. Η κλειστή αυτή γραμμή συνήθως περιέχεται σε ένα μεγαλύτερο πλαίσιο που περιέχει όλα τα στοιχεία του συνόλου αναφοράς. Για παράδειγμα αν $\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ είναι το υπερσύνολο αναφοράς και $\boldsymbol{A}$ εάν υποσύνολο του $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\}$ τότε το διάγραμμα του Venn για το $\boldsymbol{A}$ είναι:



Με χρήση των διαγραμμάτων αυτών είναι δυνατόν αναπαρασταθούν και οι διάφορες πράξεις μεταξύ συνόλων όπως ενδεικτικά φαίνεται στη συνέχεια για την τομή δύο συνόλων.



1.4. Πληθικός αριθμός - Πεπερασμένα σύνολα και απειροσύνολα (διαισθητικοί ορισμοί)

Χωρίς έμφαση σε θεωρητικά αυστηρούς ορισμούς θα ορίσουμε ως πληθικό αριθμό ενός συνόλου $\boldsymbol{A}$ το πλήθος των στοιχείων του ή ακόμη το φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, ο οποίος δηλώνει από πόσα στοιχεία αποτελείται το σύνολο $\boldsymbol{A}$ και θα συμβολίζουμε με $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{n}.$

Για να προσδιορίσουμε το $\boldsymbol{n}$ θα πρέπει να αντιστοιχίσουμε τα στοιχεία του συνόλου ένα προς ένα διαδοχικά με τους φυσικούς αριθμούς $\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \dots, \boldsymbol{n}$ Η συγκεκριμένη, αυτή αντιστοίχιση, γενικά είναι εφικτή μόνον όταν το σύνολο αποτελείται από περιορισμένο (πεπερασμένο) πλήθος διακριτών, μεταξύ τους, στοιχείων. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο ονομάζεται πεπερασμένο σύνολο. Αντίθετα, όταν το πλήθος των στοιχείων του συνόλου είναι «απεριόριστο» και δεν είναι δυνατό να προσδιορισθεί ένας φυσικός αριθμός $\boldsymbol{n}$ τότε το σύνολο ονομάζεται απειροσύνολο. Ορισμένα από τα απειροσύνολα χαρακτηρίζονται ως αριθμήσιμα όταν τα στοιχεία τους είναι δυνατόν να αντιστοιχηθούν ένα προς ένα με τα στοιχεία του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.

Αν $\boldsymbol{P}$ και $\boldsymbol{Q}$ είναι πεπερασμένα σύνολα τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για τον πληθικό αριθμό των συνόλων αυτών.

Ιδιότητες

- $|\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q}| \leq |\boldsymbol{P}| + |\boldsymbol{Q}|$
- $|\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q}| = |\boldsymbol{P}| + |\boldsymbol{Q}|$ όταν $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{Q} = \emptyset$
- $|\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{Q}| \leq \boldsymbol{min}(|\boldsymbol{P}|, |\boldsymbol{Q}|)$
- $|\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}| \geq |\boldsymbol{P}| - |\boldsymbol{Q}|$
- $|\boldsymbol{P} \oplus \boldsymbol{Q}| = |\boldsymbol{P}| + |\boldsymbol{Q}| - \boldsymbol{2}|\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{Q}|$