ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ
ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΑ

2. Λογικές Προτάσεις

2.1. Προτάσεις και κατηγορήματα

<u>Ορισμός:</u> Μια λογική πρόταση, ή απλά πρόταση, είναι μια έκφραση που δηλώνει ένα γεγονός και είναι είτε αληθής είτε ψευδής. Θα αναφερόμαστε σε λογικές προτάσεις με συμβολικά ονόματα όπως: ***p, q, r, s, ...*** και θα τις χαρακτηρίζουμε τις μεν αληθείς με το σύμβολο ***T (true)*** ή ***A (αληθής)*** τις δε ψευδείς με το σύμβολο ***F (false)*** ή ***Ψ (ψευδής)***.

Οι επόμενες εκφράσεις είναι λογικές προτάσεις γιατί είναι δυνατόν να χαρακτηριστούν ως αληθείς ή ψευδείς:
- ***p: 'Το Παρίσι είναι πρωτεύουσα της Αργεντινής'***
- ***q: '3+1 < 4+2'***
- ***r: 'Η εξίσωση*** x^2-3x+2 ***έχει δύο πραγματικές ρίζες'***

Οι επόμενες εκφράσεις δεν είναι λογικές προτάσεις γιατί δεν είναι δηλωτικές φράσεις δηλαδή δεν δηλώνουν γεγονότα αληθή ή ψευδή:
- ***p: 'Τι ώρα είναι;'***
- ***q: 'Δώστε την προτίμηση σας'***

Οι επόμενες εκφράσεις δεν είναι λογικές προτάσεις γιατί δεν είναι δυνατόν να αποφανθεί κάποιος περί του αληθούς ή του ψευδούς τουλάχιστον με τα στοιχεία που δίνονται στις φράσεις:
- ***p: 'Θα βρέχει στην Αθήνα την 28η Οκτωβρίου'***
- ***q: '*** $x \leq 42$ ***'***

Από το τελευταίο παράδειγμα θα παρατηρήσουμε ότι η φράση '$x \leq 42$' εξαρτάται από τη μεταβλητή x η οποία όταν πάρει κάποια συγκεκριμένη τιμή δίνει μια νέα έκφραση η οποία είναι είτε αληθής είτε ψευδής. Μια έκφραση αυτού του τύπου ονομάζεται *προτασιακός τύπος* ή *ανοιτή πρόταση*.

<u>Ορισμός:</u> Ένας ***κατηγόρημα*** ή ***προτασιακός τύπος*** ή ***ανοικτή πρόταση*** είναι μια έκφραση η οποία περιλαμβάνει μία ή περισσότερες μεταβλητές οι οποίες όταν αντικατασταθούν από τιμές δίνουν αντίστοιχες λογικές προτάσεις.

Τους προτασιακούς τύπους τους συμβολίζουμε με τρόπο αντίστοιχο με εκείνο των λογικών προτάσεων δηλώνοντας εντός παρενθέσεων τη μεταβλητή ή τις μεταβλητές του. Στη συνέχεια δίνονται παραδείγματα εκφράσεων οι οποίες είναι προτασιακοί τύποι μιας, δύο και τριών μεταβλητών αντίστοιχα καθώς και οι αντίστοιχοι συμβολισμοί:

– $\boldsymbol{p(x)}$ ***: ‘ το έτος x είναι δίσεκτο ’***
– $\boldsymbol{p(x, y)}$ **: ‘ $\boldsymbol{x \bmod y = 2}$ ’**
– $\boldsymbol{p(x, y, z)}$ ***: ‘ ο x και η y είναι γονείς του z ’***

<u>**Σημείωση:**</u> Η χρήση αποστρόφων κατά τη γραφή των προτάσεων δεν είναι δεσμευτική και χρησιμοποιείται μόνο για να επιτονισθεί η φράση που καθορίζει την πρόταση.

2.2. Σύνθετες προτάσεις - Πράξεις σύνθεσης λογικών προτάσεων

Οι λογικές προτάσεις μπορούν να «συνδυαστούν» για να παραχθούν νέες λογικές προτάσεις. Οι λογικές προτάσεις που προκύπτουν από το συνδυασμό άλλων προτάσεων ονομάζονται ***σύνθετες λογικές προτάσεις*** ενώ εκείνες που δεν προκύπτουν από το συνδυασμό άλλων ονομάζονται ***απλές ή ατομικές λογικές προτάσεις***.

Έστω $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ δύο λογικές προτάσεις. Ορίζουμε σύνθετες προτάσεις ως «συνδυασμούς» των $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ σύμφωνα με τις πράξεις σύνθεσης που ορίζονται στη συνέχεια.

<u>**Ορισμός:**</u> Η διάζευξη των προτάσεων $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ είναι μια νέα πρόταση που συμβολίζεται με $\boldsymbol{p \vee q}$ ή $\boldsymbol{p \text{ or } q}$ και η οποία είναι αληθής όταν είτε η μία από τις δύο είτε και οι δύο, $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$, είναι αληθείς και είναι ψευδής όταν και η $\boldsymbol{p}$ και η $\boldsymbol{q}$ είναι ψευδείς.

<u>**Ορισμός:**</u> Η σύζευξη των προτάσεων $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ είναι μια νέα πρόταση που συμβολίζεται με $\boldsymbol{p \wedge q}$ ή $\boldsymbol{p \text{ and } q}$ και η οποία είναι αληθής όταν και οι δύο, $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$, είναι αληθείς, και ψευδής όταν, είτε η μία είτε και οι δύο εκ των $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$, είναι ψευδείς.

<u>**Ορισμός:**</u> Η άρνηση της $\boldsymbol{p}$ είναι μια νέα πρόταση που συμβολίζεται με $\boldsymbol{\overline{p}}$ ή $\boldsymbol{\sim p}$ ή $\boldsymbol{\text{not}\, p}$ και η οποία είναι αληθής όταν η $\boldsymbol{p}$ είναι ψευδής, και ψευδής όταν η $\boldsymbol{p}$ είναι αληθής.

2.3. Πίνακες Αληθείας

Οι προηγούμενες δυνατότητες «συνδυασμού» λογικών προτάσεων ορίζουν αντίστοιχα τις πράξεις της διάξευξης και της σύξευξης δύο λογικών προτάσεων καθώς και της άρνησης μιας λογικής πρότασης. Τα αποτελέσματα των λογικών πράξεων συνοψίζονται στους επόμενους πίνακες οι οποίοι ονομάζονται πίνακες αληθείας.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \vee q}$	$\boldsymbol{p \wedge q}$	$\overline{\boldsymbol{p}}$
T	***T***	***T***	***T***	***F***
T	***F***	***T***	***F***	***F***
F	***T***	***T***	***F***	***T***
F	***F***	***F***	***F***	***T***

Οι πράξεις της διάξευξης και της σύζευξης γενικεύονται για τρείς ή περισσότερες λογικές προτάσεις και για την εφαρμογή τους μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προσεταιριστική ιδιότητα:

– $\boldsymbol{p \vee q \vee r \equiv (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)}$

– $\boldsymbol{p \wedge q \wedge r \equiv (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)}$

Σημείωση: Στις σχέσεις αυτές δεν χρησιμοποιείται το σύμβολο της ισότητας ‘$=$’ αλλά το σύμβολο ‘ $\equiv$ ’ γιατί εδώ δεν πρόκειται για ισότητα με την κλασσική έννοια αλλά για ισοδυναμία λογικών προτάσεων η οποία ορίζεται σε επόμενη παράγραφο του κειμένου.

Οι πίνακες αληθείας για τη σύζευξη και τη διάζευξη τριών λογικών προτάσεων είναι:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p \vee q \vee r}$	$\boldsymbol{p \wedge q \wedge r}$
T	***T***	***T***	***T***	***T***
T	***T***	***F***	***T***	***F***
T	***F***	***T***	***T***	***F***
T	***F***	***F***	***T***	***F***
F	***T***	***T***	***T***	***F***
F	***T***	***F***	***T***	***F***
F	***F***	***T***	***T***	***F***
F	***F***	***F***	***F***	***F***

Παρατηρείστε ότι για την κατασκευή του πίνακα αληθείας μιας σύνθετης λογικής πρότασης απαιτούνται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των τιμών αληθείας ***T*** και ***F*** των προτάσεων που συνθέτουν τη σύνθετη πρόταση. Έτσι για τον πίνακα αληθείας της διάζευξης τριών λογικών προτάσεων απαιτούνται $\boldsymbol{2^3}$ συνδυασμοί των τιμών ***T*** και ***F*** και άρα $\boldsymbol{2^3 = 8}$ γραμμές.

Η κατασκευή του πίνακα αληθείας μιας σύνθετης λογικής πρότασης είναι δυνατόν να γίνει με διάφορους τρόπους. Μία μέθοδος είναι εκείνη κατά την οποία με βάση τις ατομικές προτάσεις κατασκευάζουμε σταδιακά τις επί μέρους σύνθετες προτάσεις από τις οποίες συντίθεται η τελική σύνθετη πρόταση υπακούοντας στις παρενθέσεις και στην προτεραιότητα των πράξεων. Για παράδειγμα ο πίνακας αληθείας της πρότασης $\overline{(\boldsymbol{p} \wedge \overline{\boldsymbol{q}})}$ ακολουθεί τα εξής βήματα:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\overline{\boldsymbol{q}}$	$\boldsymbol{p} \wedge \overline{\boldsymbol{q}}$	$\overline{(\boldsymbol{p} \wedge \overline{\boldsymbol{q}})}$
T	***T***	***F***	***F***	***T***
T	***F***	***T***	***T***	***F***
F	***T***	***F***	***F***	***T***
F	***F***	***T***	***F***	***T***
Ατομικές προτάσεις		***Βήμα 1^{o}***	***Βήμα 2^{o}***	***Βήμα 3^{o}***

<u>Ορισμός:</u> Δύο σύνθετες λογικές προτάσεις $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \dots)$ και $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \dots)$ ονομάζονται λογικά ισοδύναμες ή απλά ισοδύναμες και συμβολίζονται $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \dots) \equiv \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \dots)$, όταν συντίθενται από τις ίδιες ατομικές προτάσεις $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \dots$ και για τις ίδιες τιμές αληθείας των ατομικών προτάσεων έχουν τους ίδιους πίνακες αληθείας. Για παράδειγμα ισχύει η λογική ισοδυναμία $\overline{(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})} \equiv \overline{\boldsymbol{p}} \wedge \overline{\boldsymbol{q}}$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$p \vee q$	$\overline{(p \vee q)}$
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	T	T	F	T

2.4. Ιδιότητες της άλγεβρας των λογικών προτάσεων

Με χρήση της λογικής ισοδυναμίας είναι δυνατόν να αποδειχθούν οι επόμενες ιδιότητες:

1. **Προσεταιριστική ιδιότητα**
   - $(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$
   - $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$
2. **Αυτοπαθής ιδιότητα**
   - $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{p}$
   - $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{p}$
3. **Μεταθετική ιδιότητα**
   - $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}$
   - $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{p}$
4. **Επιμεριστική ιδιότητα**
   - $\boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \equiv (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r})$
   - $\boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}) \equiv (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r})$
5. **Ταυτοτική ιδιότητα**
   - $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{T} \equiv \boldsymbol{T}$
   - $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{T} \equiv \boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$
6. **Ιδιότητες συμπληρώματος**
   - $\boldsymbol{p} \vee \overline{\boldsymbol{p}} \equiv \boldsymbol{T}$ και $\boldsymbol{p} \wedge \overline{\boldsymbol{p}} \equiv \boldsymbol{F}$
   - $\overline{(\overline{\boldsymbol{p}})} \equiv \boldsymbol{p}$ **,** $\overline{\boldsymbol{F}} \equiv \boldsymbol{T}$ **και** $\overline{\boldsymbol{T}} \equiv \boldsymbol{F}$
7. **Κανόνες του DeMorgan**
   - $\overline{(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})} \equiv \overline{\boldsymbol{p}} \vee \overline{\boldsymbol{q}}$
   - $\overline{(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})} \equiv \overline{\boldsymbol{p}} \wedge \overline{\boldsymbol{q}}$

2.5. Άλλες πράξεις συνδυασμού προτάσεων

Ορισμός: Η πρόταση ***' αν $\boldsymbol{p}$ τότε $\boldsymbol{q}$ '*** είναι μια νέα πρόταση που προκύπτει από τις προτάσεις $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$, συμβολίζεται με $\boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{q}$ ή $\boldsymbol{p} \Longrightarrow \boldsymbol{q}$ και η οποία είναι αληθής σε όλες τις περιπτώσεις εκτός εάν η $\boldsymbol{p}$ είναι αληθής και η $\boldsymbol{q}$ είναι ψευδής οπότε είναι ψευδής. Η νέα αυτή πρόταση ονομάζεται και υποθετική ή και απλή συνεπαγωγή.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{q}$
T	***T***	***T***
T	***F***	***F***
F	***T***	***T***
F	***F***	***T***

Ορισμός: Η πρόταση ***' $\boldsymbol{p}$ αν και μόνον αν $\boldsymbol{q}$ '*** είναι μια νέα πρόταση που προκύπτει από τις προτάσεις $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$, συμβολίζεται με $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ ή $\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{q}$ και η οποία είναι αληθής όταν οι $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ είναι και οι δύο ταυτόχρονα αληθείς ή ψευδείς. Αν οι προτάσεις $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ έχουν διαφορετική τιμή αληθείας τότε η νέα πρόταση είναι ψευδής. Η νέα αυτή πρόταση ονομάζεται και διπλή υποθετική ή και διπλή συνεπαγωγή.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$
T	***T***	***T***
T	***F***	***F***
F	***T***	***F***
F	***F***	***T***

Ορισμός: Η αποκλειστική διάζευξη είναι μια νέα πρόταση που προκύπτει από τις προτάσεις $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$, συμβολίζεται με $\boldsymbol{p} \underline{\vee} \boldsymbol{q}$ σημαίνει ***' $\boldsymbol{p}$ ή $\boldsymbol{q}$ αλλά όχι και οι δύο '*** και η οποία είναι αληθής όταν μόνον η $\boldsymbol{p}$ ή μόνον η $\boldsymbol{q}$ είναι αληθής. Αν οι προτάσεις $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ έχουν την ίδια τιμή αληθείας δηλαδή είναι και οι δύο ταυτόχρονα αληθείς ή ψευδείς τότε η νέα πρόταση είναι ψευδής.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \underline{\vee} \boldsymbol{q}$
T	***T***	***F***
T	***F***	***T***
F	***T***	***T***
F	***F***	***F***

<u>**Ορισμός:**</u> Η από κοινού άρνηση (joint denial) είναι μια νέα πρόταση που προκύπτει από τις προτάσεις $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$, συμβολίζεται με $\boldsymbol{p \downarrow q}$ σημαίνει ***'ούτε η $\boldsymbol{p}$ ούτε η $\boldsymbol{q}$ ούτε και οι δύο'*** και είναι αληθής όταν και οι δύο η $\boldsymbol{p}$ και η $\boldsymbol{q}$ είναι ψευδείς. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η νέα πρόταση είναι ψευδής.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \downarrow q}$
T	***T***	***F***
T	***F***	***F***
F	***T***	***F***
F	***F***	***T***

2.6. Ταυτολογίες και Αντιφάσεις

<u>**Ορισμός:**</u> Μια σύνθετη πρόταση $\boldsymbol{P(p,q,r,\dots)}$ ονομάζεται ταυτολογία όταν είναι αληθής για οποιεσδήποτε τιμές αληθείας των ατομικών προτάσεων $\boldsymbol{p,q,r,\dots}$ από τις οποίες αποτελείται. Αυτό ισοδυναμεί με ***T*** στην τελευταία στήλη του πίνακα αληθείας.

Παράδειγμα: Η πρόταση $\boldsymbol{p \vee \overline{p}}$ είναι ταυτολογία.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{\overline{p}}$	$\boldsymbol{p \vee \overline{p}}$
T	***F***	***T***
F	***T***	***T***

<u>**Ορισμός:**</u> Μια σύνθετη πρόταση $\boldsymbol{P(p,q,r,\dots)}$ ονομάζεται αντίφαση όταν είναι ψευδής για οποιεσδήποτε τιμές αληθείας των ατομικών προτάσεων $\boldsymbol{p,q,r,\dots}$ από τις οποίες αποτελείται. Αυτό ισοδυναμεί με ***F*** στην τελευταία στήλη του πίνακα αληθείας.

Παράδειγμα: Η πρόταση $\boldsymbol{p \wedge \overline{p}}$ είναι αντίφαση.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{\overline{p}}$	$\boldsymbol{p \wedge \overline{p}}$
T	***F***	***F***
F	***T***	***F***

2.7. Κατηγορήματα και Σύνολα αληθείας

Έστω $\boldsymbol{p(x)}$ ένα κατηγόρημα μιας μεταβλητής $\boldsymbol{x}$ η οποία παίρνει τιμές από ένα σύνολο $\boldsymbol{U}$. Όπως ορίσαμε σε προηγούμενη παράγραφο για κάθε τιμή του $\boldsymbol{x \in U}$ το κατηγόρημα $\boldsymbol{p(x)}$ δίνει μια λογική πρόταση.

Οι τιμές του $\boldsymbol{x}$ για τις οποίες το κατηγόρημα δίνει μια αληθή λογική πρόταση αποτελούν ένα σύνολο, έστω $\boldsymbol{P}$, το οποίο είναι υποσύνολο του $\boldsymbol{U}$, $(\boldsymbol{P \subseteq U})$, και ονομάζεται σύνολο αληθείας του κατηγορήματος. Είναι προφανές ότι για τον ορισμό του συνόλου αληθείας του κατηγορήματος το $\boldsymbol{U}$ είναι το υπερσύνολο αναφοράς που στο κεφάλαιο των συνόλων συμβολίσαμε με $\boldsymbol{\Omega}$. Έτσι είναι δυνατόν να ορίσουμε το $\boldsymbol{P}$ ως εξής: $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{x \in U} : \boldsymbol{p(x)}\}$.

Το σύνολο των τιμών του $\boldsymbol{x}$ οι οποίες δίνουν μια ψευδή λογική πρόταση αποτελούν επίσης ένα υποσύνολο του $\boldsymbol{U}$ που συμπίπτει με το συμπλήρωμα του $\boldsymbol{P}$, $\overline{\boldsymbol{P}}$. Άρα $\overline{\boldsymbol{P}} = \{\boldsymbol{x \in U} : \overline{\boldsymbol{p(x)}}\}$.

Αν $\boldsymbol{p(x)}$ και $\boldsymbol{q(x)}$ είναι δύο κατηγορήματα μιας μεταβλητής $\boldsymbol{x}$, όπου $\boldsymbol{x \in U}$, τότε γενικεύοντας τη χρήση των λογικών πράξεων από τις λογικές προτάσεις στα κατηγορήματα είναι δυνατόν να ορίσουμε τα ακόλουθα σύνθετα κατηγορήματα:

– $\boldsymbol{p(x)} \vee \boldsymbol{q(x)}$, διάζευξη κατηγορημάτων
– $\boldsymbol{p(x)} \wedge \boldsymbol{q(x)}$, σύζευξη κατηγορημάτων

Είναι προφανές ότι αν $\boldsymbol{p(x)}$ και $\boldsymbol{q(x)}$ είναι δύο προτασιακοί τύποι με σύνολα αληθείας $\boldsymbol{P}$ και $\boldsymbol{Q}$ αντίστοιχα τότε:

– η διάζευξη τους, $\boldsymbol{p(x)} \vee \boldsymbol{q(x)}$ έχει ως σύνολο αληθείας το σύνολο $\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q}$,
– η σύζευξή τους, $\boldsymbol{p(x)} \wedge \boldsymbol{q(x)}$, έχει ως σύνολο αληθείας το σύνολο $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{Q}$.

Κατά συνέπεια, οι λογικές πράξεις επεκτείνονται από τις απλές λογικές προτάσεις και στα κατηγορήματα και κάθε λογική πράξη αντιστοιχεί σε μια πράξη μεταξύ των αντίστοιχων συνόλων αληθείας των κατηγορημάτων. Στην παράγραφο αυτή η παροαυσίαση αφορά στα κατηγορήματα με μία μεταβλητή και η ισχύς των κατηγορημάτων περισσοτέρων μεταβλητών θα δειχτεί σε επόμενο κεφάλαιο όταν ορίσουμε τις σχέσεις μεταξύ συνόλων.

2.8. Κατηγορήματα και Λογική 1^{ης} Τάξεως

Οι απλές λογικές προτάσεις, που υπενθυμίζεται ότι δεν κάνουν χρήση μεταβλητών, ονομάζονται και κατηγορήματα μηδενικού βαθμού. Το σύνολο των απλών λογικών προτάσεων με τις λογικές πράξεις συνιστούν την προτασιακή λογική ή αλλιώς τη λογική κατηγορημάτων 0 (μηδενικού) βαθμού. Αντίθετα, όπως είδαμε, τα κατηγορήματα στα οποία χρησιμοποιούνται μία ή περισσότερες μεταβλητές οι διατυπώσεις είναι ανοικτές ως προς την αξιολόγηση ως αληθείς ή ψευδείς. Εξ αυτού προκύπτει και η ονομασία τους ως ανοικτές προτάσεις ή προτασιακοί τύποι. Η χρήση των μεταβλητών στη διατύπωση των κατηγορημάτων μπορεί να είναι:

(a) Χωρίς περιορισμούς και μόνο με αναφορά στο σύνολο που ανήκει κάθε μεταβλητή.

(b) Με περιορισμούς που καθορίζονται από ειδικούς τελεστές που ονομάζονται ποσοδείκτες.

Οι ποσοδείκτες δεσμεύουν τις μεταβλητές εντός συγκεκριμένης εμβέλειας και είναι δύο ειδών:

(i) ο καθολικός ποσοδείκτης (universal quantifier) που συμβολίζεται με το σύμβολο $\forall$

(ii) ο υπαρξιακός ποσοδείκτης (existential quantifier) που συμβολίζεται με το σύμβολο $\exists$

Μια μεταβλητή που ορίζεται μετά από ένα ποσοδείκτη και εντός της εμβέλειας του ονομάζεται δεσμευμένη μεταβλητή αλλιώς χαρακτηρίζεται ως ελεύθερη. Τα ακόλουθα είναι παραδείγματα κατηγορημάτων με ποσοδείκτες:

(1) $(\forall x)(\exists y)\big(P(x) \wedge Q(x,y)\big)$

(2) $(\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \vee Q(x,y)\big)$

Αν σε κάθε ένα από τα προηγούμενα παραδείγματα ορισθούν τα κατηγορήματα $P(x)$, $Q(x,y)$ και $P(x,y)$ τότε η διατύπωση που προκύπτει είναι μια σύνθετη πρόταση που δεν μπορεί να διατυπωθεί με απλές λογικές προτάσεις που δεν περιέχουν μεταβλητές. Αν θεωρήσουμε το σύνολο αναφοράς των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ και τις μεταβλητές $x, y \in \mathbb{N}$, τότε για τα προηγούμενα παραδείγματα μπορούμε να ορίσουμε τα εξής:

(1) Για τα κατηγορήματα $P(x)$: x είναι πρώτος αριθμός , $Q(x,y)$: x είναι πολλαπλάσιο του y, το κατηγόρημα του παραδείγματος αυτού περιγράφει ότι «*για κάθε πρώτο φυσικό αριθμό x υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός y από τον οποίο το x διαρείται ακριβώς*».

(2) Αν $P(x,y)$: $x > \mathrm{y}$, $Q(x,y)$: $x \leq y$ τότε το κατηγόρημα του παραδείγματος αυτού περιγράφει ότι, «*για δύο οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς x, y ορίζεται η διάταξη μεταξύ τους*».

Τα κατηγορήματα, οι ποσοδείκτες, οι κανόνες σύνταξης σύνθετων εκφράσεων και τέλος η σημασιολογία συνθέτουν τη λογική πρώτης τάξης ή κατηγορηματική λογική (predicate logic) η οποία επεκτείνει την προτασιακή λογική. Είναι πολυπλοκότερη από την προτασιακή λογική και μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενίκευση αυτής. Η αναλυτική μελέτη της κατηγορηματικής λογικής είναι εκτός των πλαισίων αυτού του μαθήματος.

Θα σημειώσουμε, εδώ, ότι η λογική πρώτης τάξης αποτελεί τη βάση του λογικού προγραμματισμού και της γλώσσας Prolog. Επί πλέον, αποτελεί μια από τις κυριώτερες προσεγγίσεις για την αναπαράσταση της γνώσης (knowledge representation) ή αλλιώς γνωστική μοντελοποίηση (cognitive modeling) σε συστήματα της κλασικής Τεχνητής Νοημοσύνης δεδομένου ότι επιτρέπει την διατύπωση, έκφραση, πολύπλοκων σχέσων μεταξύ των αντικειμένων του κόσμου που συνθέτουν ένα πρόβλημα.