ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ

3. Η Αρχή του Εγκλεισμού – Αποκλεισμού

Η αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού δίνει τη σχέση για τον υπολογισμό του πληθικού αριθμού της ένωσης δύο ή περισσοτέρων συνόλων. Για διαφορετικά σύνολα έχουμε:

– Αν $\boldsymbol{A_1}$ και $\boldsymbol{A_2}$ είναι δύο σύνολα όχι ξένα μεταξύ τους τότε ισχύει η σχέση:

$$|\boldsymbol{A_1} \cup \boldsymbol{A_2}| = |\boldsymbol{A_1}| + |\boldsymbol{A_2}| - |\boldsymbol{A_1} \cap \boldsymbol{A_2}|$$

– Αν $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$ και $\boldsymbol{A_3}$ είναι τρία σύνολα όχι ξένα μεταξύ τους τότε ισχύει η σχέση:

$$|\boldsymbol{A_1} \cup \boldsymbol{A_2} \cup \boldsymbol{A_3}| = |\boldsymbol{A_1}| + |\boldsymbol{A_2}| + |\boldsymbol{A_3}| - |\boldsymbol{A_1} \cap \boldsymbol{A_2}| - |\boldsymbol{A_1} \cap \boldsymbol{A_3}| - |\boldsymbol{A_2} \cap \boldsymbol{A_3}| + |\boldsymbol{A_1} \cap \boldsymbol{A_2} \cap \boldsymbol{A_3}|$$

– Γενικά αν $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{A_3}, \ldots \boldsymbol{A_n}$ είναι $\boldsymbol{n}$ σύνολα όχι ξένα μεταξύ τους τότε ισχύει η σχέση:

$$|\boldsymbol{A_1} \cup \boldsymbol{A_2} \cup \boldsymbol{A_3} \cup \ldots \cup \boldsymbol{A_n}| = \sum_{\boldsymbol{1 \le i \le n}} |\boldsymbol{A_i}| - \sum_{\boldsymbol{1 \le i \le j \le n}} |\boldsymbol{A_i} \cap \boldsymbol{A_j}| + \sum_{\boldsymbol{1 \le i \le j \le k \le n}} |\boldsymbol{A_i} \cap \boldsymbol{A_j} \cap \boldsymbol{A_k}| + \cdots + (-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{n-1}} |\boldsymbol{A_1} \cap \boldsymbol{A_2} \cap \boldsymbol{A_3} \cap \ldots \cap \boldsymbol{A_n}|$$

Παράδειγμα εφαρμογής

Ο σύλλογος φοιτητών του Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών προγραμματίζει μια εκδήλωση για τους $\boldsymbol{236}$ φοιτητές του πρώτου και του τρίτου εξαμήνου σπουδών. Η ημερομηνία της εκδήλωσης συμπίπτει με εξετάσεις προόδου στα μαθήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης και της Αρχιτεκτονικής Υπολογιστών. Η εκδήλωση θα διεξαχθεί μόνο εάν συμμετάσχει τουλάχιστον το $\boldsymbol{50}\%$ των φοιτητών και των δύο εξαμήνων. Οι φοιτητές που παρακολουθούν το μάθημα της Μαθηματικής Ανάλυσης είναι $\boldsymbol{95}$, αυτοί που παρακολουθούν το μάθημα της Αρχιτεκτονικής Υπολογιστών είναι $\boldsymbol{70}$, ενώ $\boldsymbol{53}$ παρακολουθούν και τα δύο μαθήματα. Υπάρχει ο απαιτούμενος αριθμός σπουδαστών ώστε να πραγματοποιηθεί η εκδήλωση;

Ας συμβολίσουμε με $\boldsymbol{A}$ το σύνολο όλων των φοιτητών των δύο αυτών εξαμήνων, $\boldsymbol{A_1}$ το σύνολο αυτών που παρακολουθούν τη Μαθηματική Ανάλυση και $\boldsymbol{A_2}$ το σύνολο αυτών που παρακολουθούν την Αρχιτεκτονική Υπολογιστών. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$|\boldsymbol{A}| = \mathbf{236}$, $|\boldsymbol{A_1}| = \mathbf{95}$, $|\boldsymbol{A_2}| = \mathbf{70}$ **και** $|\boldsymbol{A_1} \cap \boldsymbol{A_2}| = \mathbf{53}$

Το ζητούμενο στο πρόβλημα αυτό είναι ο πληθικός αριθμός της ένωσης των $\boldsymbol{A_1}$ και $\boldsymbol{A_2}$. Από την εφαρμογή της Αρχής του Εγκλεισμού – Αποκλεισμού προκύπτει ότι:

$$|\boldsymbol{A_1} \cup \boldsymbol{A_2}| = \mathbf{95} + \mathbf{70} - \mathbf{53} = \mathbf{112}\ .$$

Άρα το πλήθος των φοιτητών που έχει εξετάσεις στα δύο αυτά μαθήματα είναι $\mathbf{112}$. Επί πλέον το $\mathbf{50}\%$ του συνόλου των φοιτητών είναι $\mathbf{236} * \mathbf{0.50} = \mathbf{118}$ φοιτητές.

Κατά συνέπεια η εκδήλωση είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί τη συγκεκριμένη ημερομηνία.

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

4. Η Αρχή της Επαγωγής

Ορισμός: Έστω $\boldsymbol{P}$ μια πρόταση που εξαρτάται από ένα φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n}$ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{P(n)}$. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τη γνωστή από τα σχολικά Μαθηματικά ισότητα

$$\boldsymbol{P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό ότι η $\boldsymbol{P(n)}$ ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ δεν αρκεί να θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n = n_0}$ και αφού αποδείξουμε τη σχέση $\boldsymbol{P(n_0)}$ να ισχυριστούμε ότι αφού η σχέση $\boldsymbol{P(n)}$ ισχύει για ένα αριθμό $\boldsymbol{n_0}$ που τυχαία επιλέξαμε, άρα ισχύει για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n}$. Η συγκεκριμένη απόδειξη αφορά το μόνο $\boldsymbol{n_0}$ και όχι κάποιον άλλο φυσικό αριθμό όπως το $\boldsymbol{n_0 + 1}$, ή το $\boldsymbol{n_0 + 2}$ ή οποιονδήποτε άλλο φυσικό $\boldsymbol{k}$ ή $\boldsymbol{m}$.

Η Αρχή της Επαγωγής ή Μαθηματική Επαγωγή είναι μία τεχνική αποδείξεων στα Μαθηματικά με την οποία αποδεικνύουμε ότι μία σχέση $\boldsymbol{P(n)}$ ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ εκτός ενδεχομένως κάποιου πεπερασμένου υποσυνόλου $\{\boldsymbol{1, 2, \dots, n_0}\}$. Η τεχνική αυτή περιλαμβάνει τα ακόλουθα δύο στάδια:

(1) Βάση της επαγωγής

Αποδεικνύουμε ότι η σχέση ισχύει για κάποιο συγκεκριμένο $\boldsymbol{n = n_0}$, δηλαδή ότι $\boldsymbol{P(n_0)}$ είναι αληθής.

(2) Βήμα της επαγωγής

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για κάποιο $\boldsymbol{n = k}$, δηλαδή ότι $\boldsymbol{P(k)}$ είναι αληθής και με την υπόθεση αυτή αποδεικνύουμε ότι η $\boldsymbol{P(k+1)}$ είναι αληθής, δηλαδή η σχέση ισχύει για $\boldsymbol{n = k + 1}$.

Το αποτέλεσμα αυτού του αποδεικτικού σχήματος είναι ότι η σχέση $\boldsymbol{P(n)}$ ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ εκτός του πεπερασμένου υποσυνόλου $\{\boldsymbol{1, 2, \dots, n_0}\}$.

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \cdots & \boldsymbol{n_0} & & \cdots & \boldsymbol{k} & & \boldsymbol{k+1} & \cdots \\ \boldsymbol{P}(\mathbf{1}) & \boldsymbol{P}(2) & \boldsymbol{P}(\mathbf{3}) & \cdots & \boldsymbol{P}(\boldsymbol{n_0}) & \longrightarrow & \cdots & \boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}) & \longrightarrow & \boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1}) & \cdots \end{array}$$

Έστω ότι $\boldsymbol{n_0}$ είναι κάποιος αριθμός για παράδειγμα μεγαλύτερος από τους $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ ή $\mathbf{4}$ χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν να είναι κάποιος ακόμη μεγαλύτερος. Είναι προφανές ότι η «**αποδεικτική μετάβαση**» του Βήματος της Επαγωγής από τον αριθμό $\boldsymbol{k}$ στον επόμενο αριθμό $\boldsymbol{k}+\mathbf{1}$ ισχύει και στην περίπτωση που θα θέσουμε το $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n_0}$, για το οποίο αποδείξαμε στη Βάση της Επαγωγής ότι η σχέση $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{n_0})$ ισχύει. Επομένως ισχύεικαι η σχέση $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{n_0}+\mathbf{1})$**,** εξ αυτού και η σχέση $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{n_0}+\mathbf{2})$ και ούτω καθεξής μέχρι το $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n}$, δηλαδή οποιονδήποτε φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n}$. Έτσι, όπως φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα το αποδεικτικό σχήμα «μεταφέρεται» πάνω στο άξονα των φυσικών αριθμών από τη Βάση $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n_0}$ μέχρι οποιονδήποτε φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n}$. Άρα η σχέση $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{n})$ ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{n_0}$.

Παράδειγμα*:* Να αποδειχθεί ότι σχέση $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{n}): \ \boldsymbol{n}! \geq \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$ είναι αληθής για κάθε $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{4}$.

(1) Βάση της επαγωγής:

Αποδεικνύουμε ότι $\mathbf{4}! \geq \mathbf{2}^{\mathbf{4}}$.

Ισχύει διότι $\mathbf{4}! = \mathbf{1} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{4} = \mathbf{24} \geq \mathbf{16} = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} = \mathbf{2}^{\mathbf{4}}$

(2) Βήμα της επαγωγής:

Υποθέτουμε ότι για $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$ ισχύει η σχέση $\boldsymbol{k}! \geq \mathbf{2}^{\boldsymbol{k}}$

Θα αποδείξουμε ότι για $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}+\mathbf{1}$ ισχύει η σχέση $(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})! \geq \mathbf{2}^{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}}$

$$\left.\begin{array}{r} (\boldsymbol{k}+\mathbf{1})! = (\boldsymbol{k}+\mathbf{1}) \cdot \boldsymbol{k}! \\ \boldsymbol{k}! \geq \mathbf{2}^{\boldsymbol{k}} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\boldsymbol{k}+\mathbf{1})! \geq (\boldsymbol{k}+\mathbf{1}) \cdot \mathbf{2}^{\boldsymbol{k}}$$

Επί πλέον,

$$\boldsymbol{k} > 2 \Longrightarrow k+1 > 2 \Longrightarrow (\boldsymbol{k}+\mathbf{1}) \cdot \mathbf{2}^{\boldsymbol{k}} > 2 \cdot \mathbf{2}^{\boldsymbol{k}} = \mathbf{2}^{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}}$$

και τελικά

$$(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})! \geq \mathbf{2}^{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}}$$

Συνήθως κατά την εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής ο αριθμός $\boldsymbol{n_0}$ προσδιορίζεται από το πρόβλημα. Αν αυτό δε συμβαίνει τότε σε ένα πρώτο στάδιο θα πρέπει να προσδιορισθεί ο $\boldsymbol{n_0}$ ως ο αριθμός εκείνος για τον οποίο για «κάποιες» τιμές του $\boldsymbol{n}$ μεγαλύτερες του $\boldsymbol{n_0}$ η σχέση $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{n})$ ισχύει.